Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 5

ФИЗИКА

Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ

„МАССА ПОКОЯ" ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 13 X 1948)

§ 1. Из электродинамики известно, что полный электромагнитный импульс **P** и полная электромагнитная энергия $\mathcal{E}$ плоской бегущей электромагнитной волны связаны соотношением [1]

$$P^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = 0, \tag{1}$$

где c — скорость света. Аналогичным соотношением связаны импульс и энергия материальной частицы, не имеющей массы покоя. Отсюда, например, следует, что плоской монохроматической бегущей световой волне нельзя приписать какую-либо отличную от нуля массу покоя. С этим же связано положение квантовой теории, что масса покоя отдельного фотона равна нулю. Однако эти известные положения нельзя распространять на электромагнитное излучение вообще. Утверждение, что свет не имеет массы покоя, было бы, вообще говоря, неправильным.

Соотношение (1) и вытекающие из него следствия справедливы только для идеально плоской бегущей волны. Реальные же источники электромагнитных волн излучают не идеально плоские волны. Такое, практически осуществляемое электромагнитное излучение можно рассматривать как суперпозицию плоских волн, распространяющихся в различных направлениях. Но для совокупности плоских произвольно направленных электромагнитных волн полный электромагнитный импульс и полная электромагнитная энергия связаны соотношением вида:

$$P^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} < 0, \tag{2}$$

вместо соотношения (1) (справедливость соотношения (2) доказывается ниже, в § 2).

Замечая, что **P** и $\mathcal{E}$ для электромагнитного излучения в вакууме составляют четырехмерный вектор [1], соотношение (2) можно записать в виде:

$$P^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m_0^2 c^2, \tag{3}$$

где m_0 — некоторая константа, определяемая структурой излучения.

Последнее уравнение по форме полностью совпадает с уравнением, связывающим импульс и энергию материальной частицы, имеющей массу покоя m_0. Таким образом, по аналогии с материальной частицей, мы можем назвать величину m_0, определяемую уравнением (3), **массой покоя электромагнитного излучения.**

Итак, для электромагнитного излучения в вакууме, наряду с понятиями электромагнитной энергии и электромагнитного импульса, с таким же основанием можно ввести понятие массы покоя электромагнитного излучения.

§ 2. Докажем справедливость неравенства (2). Поскольку всякая не плоская электромагнитная волна по теореме Фурье может быть представлена в виде суммы* плоских монохроматических волн, то векторы напряженности электрического и магнитного полей такой волны можно изобразить в виде:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \sum_n \mathbf{E}_n \cos(\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r} + \varphi_n), \\
\mathbf{H} &= \sum_n \mathbf{H}_n \cos(\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r} + \varphi_n),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\mathbf{E}_n$ и $\mathbf{H}_n$ — амплитуды напряженностей поля монохроматических компонент, $\mathbf{k}_n$ — волновые векторы компонент, φ_n — постоянные фазы, $\omega_n = c\,|\mathbf{k}_n|$. Для учета двух возможных состояний поляризации можно считать, что все значения индексов n разбиваются на пары, для каждой из которых волновые векторы одинаковы, а амплитуды и фазы различны для каждого индекса. Поскольку электромагнитное возмущение раскладывается не в интеграл, а в ряд Фурье, то система векторов $\mathbf{k}_n$ должна удовлетворять условию

$$
\int_V \cos(\mathbf{k}_n \mathbf{r} - \psi_n) \cos(\mathbf{k}_m \mathbf{r} - \psi_m)\, dV = \frac{V}{2}\, \delta_{nm}, \tag{5}
$$

где V — объем условного „ящика", в котором находится наше излучение, ψ_n и ψ_m — произвольные фазы. Используя выражения (4) и условие (5), получаем

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \int_V \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}]\, dV = \sum_n \frac{V}{2\pi c} [\mathbf{E}_n \mathbf{H}_n] = \sum_n \mathbf{P}_n, \\
\mathcal{E} &= \int_V \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)\, dV = \sum_n \frac{V}{4\pi} (E_n^2 + H_n^2) = \sum_n \mathcal{E}_n,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\mathbf{P}_n$ и $\mathcal{E}_n$ — импульс и энергия изолированной монохроматической компоненты с волновым вектором $\mathbf{k}_n$, причем $\mathbf{P}_n \parallel \mathbf{k}_n$ и

$$
|\mathbf{P}_n| = \mathcal{E}_n / c. \tag{7}
$$

Используя (6) и (7), для выражения, стоящего в левой части неравенства (2), получаем:

$$
\begin{aligned}
P^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} &= \left(\sum_n \mathbf{P}_n \right)^2 - \left(\sum_n \frac{\mathcal{E}_n}{c} \right)^2 = \\
&= \sum_{n \neq m} \left\{ (\mathbf{P}_n \mathbf{P}_m) - \frac{\mathcal{E}_n}{c} \frac{\mathcal{E}_m}{c} \right\} = \sum_{n \neq m} \{ (\mathbf{P}_n \mathbf{P}_m) - |\mathbf{P}_n| \cdot |\mathbf{P}_m| \}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Каждый член полученной справа суммы либо отрицателен, либо равен нулю. Все слагаемые этой суммы равны нулю только в том

* Далее мы будем оперировать с суммами, а не с интегралами, для упрощения выкладок. При этом появляется неприятная для мысли, но не вносящая принципиальных осложнений необходимость рассматривать все процессы только в пространстве объема V, который можно положить сколь угодно большим.

случае, когда все векторы $\mathbf{P}_n$ направлены в одну сторону. Но последнее выполняется только для идеально плоской волны. Следовательно, для любой реальной волны правая часть уравнения (8) отрицательна. Таким образом, неравенство (2) доказано.

Из уравнения (8) видно также, что его правая часть является инвариантом, т. е. константой, поскольку слагаемые правой части суть скалярные произведения четырехмерных векторов. Таким образом, независимо от предыдущего доказывается справедливость уравнения (3).

§ 3. Оценим величину m_0 для одного важного конкретного случая. Рассмотрим почти монохроматическую и почти плоскую электромагнитную волну, ограниченную как в направлении параллельном, так и в направлении перпендикулярном распространению. Иначе говоря, рассмотрим почти монохроматический световой импульс, прошедший через широкую щель.

Пусть волна распространяется в направлении x и ограничена в направлении y, перпендикулярном x. Таким образом, средний волновой вектор $\mathbf{k}_0$ направлен по x. Положим, что в заданный момент времени рассматриваемый волновой пакет ограничен в направлениях x, y интервалами $\Delta x, \Delta y$.

Так как волна почти монохроматическая и почти плоская, то

$$\Delta x \gg \lambda_0, \qquad \Delta y \gg \lambda_0, \tag{9}$$

где $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ — средняя длина волны пакета. Спектральное распределение такого ограниченного в пространстве возмущения не может быть произвольным и должно удовлетворять условиям вида*:

$$\Delta x \cdot \Delta k_x \geqslant {}^1/_2, \qquad \Delta y \cdot \Delta k_y \geqslant {}^1/_2, \tag{10}$$

где Δk_x и Δk_y — ширина пакета соответственно в направлении k_x и k_y в пространстве волновых векторов $\mathbf{k}$. Таким образом, волновые векторы $\mathbf{k}$ монохроматических компонент рассматриваемого волнового пакета имеют составляющие вдоль оси k_y и, следовательно, распределены на плоскости k_x, k_y в основном внутри некоторого малого угла α, симметрично рассекаемого осью k_x. Угол α может быть оценен выражением

$$\alpha = \Delta k_y / k_0, \tag{11}$$

поскольку, согласно (9) и (10),

$$\Delta k_x \ll k_0, \qquad \Delta k_y \ll k_0. \tag{12}$$

Мы не сделаем большой ошибки, при нашей грубой оценке величины m_0, если при дальнейших вычислениях заменим все монохроматические компоненты волнового пакета лишь двумя, волновые векторы которых лежат в плоскости k_x, k_y, направлены к оси k_x под углами $+\alpha/2$ и $-\alpha/2$ и имеют одинаковую абсолютную величину. Электромагнитные импульсы обеих компонент будем считать равными по абсолютной величине. При этом, согласно (6) и (7), абсолютная величина импульса каждой из двух компонент равна

$$P_1 = \mathscr{E}/2c. \tag{13}$$

---

* Строго говоря, соотношения (10) справедливы для комплексных скалярных волн, как это имеет место в квантовой механике. Мы же рассматриваем действительные векторные волны. Однако отличие может быть только в числовом коэффициенте, и мы вправе не обращать на него внимания, поскольку производим лишь грубую оценку.

Для рассматриваемой пары монохроматических волн, согласно (8), имеем:

$$P^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = 2(P_1^2\cos\alpha - P_1^2) = -m_0^2c^2, \tag{14}$$

или, учитывая малость α,

$$m_0^2c^2 = P_1^2\alpha^2. \tag{15}$$

Последнее уравнение, согласно (11) и (13), можно записать в виде:

$$m_0^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{4c^2}\left(\frac{\Delta k_y}{k_0}\right)^2. \tag{16}$$

Выражая k_0 через λ_0, а Δk_y, на основании (10), через Δy, окончательно получаем:

$$\frac{m_0c^2}{\mathcal{E}} \geqslant \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\lambda_0}{\Delta y}\right). \tag{17}$$

Полученное соотношение дает весьма грубую, но качественно правильную оценку m_0 почти монохроматического ограниченного светового пучка. Из этого соотношения, в частности, видно, что m_0 тем меньше, чем шире пучок, т. е. чем больше он приближается к идеально плоской волне.

§ 4. Поскольку мы связали с электромагнитным излучением некоторую массу покоя, мы можем говорить и о скорости движения этой массы. Обращая релятивистское выражение зависимости энергии тела от скорости v, мы получаем

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{\mathcal{E}}\right)^2}. \tag{18}$$

В системе отсчета, движущейся с такой скоростью, полный электромагнитный импульс равен нулю, а полная электромагнитная энергия равна m_0c^2. Таким образом, скорость v, определяемую выражением (18), можно также назвать *скоростью движения электромагнитной энергии*.

Оценка величины v для желтого (натриевого) светового пучка, ограниченного щелью в 1 см, согласно (17) и (18), дает $v = (1 - 3\cdot 10^{-12})\,c$.

Во избежание недоразумений, следует отметить, что, хотя нами и показана целесообразность введения понятия массы покоя электромагнитного излучения, однако электромагнитное излучение не следует представлять как некоторое стабильное образование, движущееся со скоростью v подобно материальному телу, поскольку ограниченный в двух направлениях волновой пакет с неизбежностью должен расплываться.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Беккер, Электронная теория, 1936