

Р. В. ХОХЛОВ

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ В ВОЛНОВОДЕ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 7 VI 1948)

В настоящей работе решается задача о нестационарных процессах в полубесконечном акустическом волноводе, имеющем вид цилиндра произвольного сечения.

На одном конце волновода имеется плоский излучатель с произвольным распределением амплитуд по поверхности, который в момент $t=0$ начинает совершать бесконечно малые перемещения по закону $e^{i\omega t}$, где ω — любое комплексное число. Взяв волновод достаточно широкого сечения, пренебрегаем поверхностными потерями и считаем стенки идеально твердыми. Ось z направим вдоль оси волновода, оси ξ и η расположим в поперечном сечении S , ограниченном замкнутым контуром Γ . Уравнение для потенциала скоростей имеет вид

$$\Delta_{\xi, \eta} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь α — коэффициент затухания, c — фазовая скорость распространения звуковых волн в неограниченной среде, $\Delta_{\xi, \eta}$ — двухмерный оператор Лапласа в плоскости (ξ, η) . На боковых стенках волновода

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0; \quad (2)$$

граничным условием по z является

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} F(\xi, \eta) e^{i\omega t} & \text{для } t > 0, \\ 0 & \text{для } t < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решение должно иметь вид уходящей волны.

Излучатель начинает действовать на невозмущенную среду, поэтому начальными условиями являются

$$\Phi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Решение поставленной задачи можно представить в виде ряда

$$\Phi(\xi, \eta, z, t) = e^{-\alpha c t} \sum_m \psi_m(z, t) T_m(\xi, \eta). \quad (5)$$

$T_m(\xi, \eta)$ — собственные нормированные функции граничной задачи.

$$\Delta_{\xi, \eta} T_m(\xi, \eta) + \lambda_m^2 T_m(\xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial T_m}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad (6)$$

$$\psi_m(z, t) = -\frac{c f_m}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\exp\left(pt - \frac{z}{c} \sqrt{p^2 + s_m^2 c^2}\right)}{(p^2 - i\chi) \sqrt{p^2 + s_m^2 c^2}} dp. \quad (7)$$

Здесь $s_m^2 = \lambda_m^2 - x^2 c^2$; $f_m = \int_S F(\xi, \eta) T_m(\xi, \eta) d\sigma$; $i\chi = i\omega + \alpha c^2$.

Интеграл (7) может быть выражен через функции Ломмеля от двух независимых аргументов (1):

$$\psi_m(z, t) = \frac{cf_m}{V s_m^2 c^2 - \chi^2} \left[iU_1\left(\frac{v}{w_1}, v\right) - U_2\left(\frac{v}{w_1}, v\right) - iU_1\left(\frac{v}{w_2}, v\right) + U_2\left(\frac{v}{w_2}, v\right) \right] H\left(t - \frac{z}{c}\right). \quad (8)$$

Здесь

$$w_{1,2} = \frac{1}{sc} \sqrt{\frac{t+z/c}{t-z/c} \left(\chi \pm V \chi^2 - s_m^2 c^2 \right)}, \quad v = sc \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}},$$

$$H\left(t - \frac{z}{c}\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < z/c, \\ 1 & \text{при } t > z/c. \end{cases}$$

Можно показать, что решение нестационарной задачи (1-4) при $t \rightarrow \infty$ переходит в решение стационарной задачи.

Если излучатель начинает совершать бесконечно малые перемещения по закону $e^{i\omega t}$ в момент $t=0$ и кончает в момент $t=\tau$, т. е. излучается импульс длительности τ , то решение задачи имеет вид

$$U(\xi, \eta, z, t) = \Phi(\xi, \eta, z, t + \tau) - \Phi(\xi, \eta, z, t).$$

Воспользовавшись некоторыми соотношениями из теории функций Ломмеля (2), можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial z} e^{-\alpha c t} \psi_m(z, t)|_{t=z/c} = f_m e^{-\alpha c z},$$

т. е. на фронте все типы волн (индекс m) в равной степени уменьшают свою амплитуду. Поскольку отношение между всеми амплитудами остается неизменным, то, несмотря на дисперсию, на фронте волны повторяется с меньшей амплитудой, но без искажений та же картина, которая была в начальный момент на излучателе.

Рассмотрим качественно зависимость скорости вдоль оси z от времени и от координаты на больших расстояниях от излучателя. Для этого будем искать асимптотическое представление интеграла

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial z} = \frac{f_m}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\exp\left(pt - \frac{z}{c} \sqrt{p^2 + s_m^2 c^2}\right)}{p - i\chi} dp \quad (9)$$

методом седловых точек. Обозначим $h = p\theta - \sqrt{p^2 + s_m^2 c^2}$, $\gamma = \sqrt{(p/c)^2 + s^2}$, $\theta = ct/z$, $p = x + iy$; s_m может быть либо действительным, либо чисто мнимым.

Мы рассмотрим случай действительного s_m . В этом случае седловая точка определяется из уравнения

$$t - \frac{d\gamma}{dp} z = 0. \quad (10)$$

$$p_{1,2} = \pm \frac{i\theta sc}{\sqrt{\theta^2 - 1}} = \pm iy_0. \quad (11)$$

Уравнение контура интегрирования (рис. 1, а, б, в) имеет вид

$$x^2 = \frac{(y\theta \mp sc \sqrt{\theta^2 - 1})^4 + (y\theta \mp sc \sqrt{\theta^2 - 1})^2 (s^2 c^2 - y^2)}{y^2 - (y\theta \mp sc \sqrt{\theta^2 - 1})^2} \quad (12)$$

Приближенное значение интеграла (9), вычисленное методом седловых точек, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n}{dz} \approx \frac{f_m}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi sc}{c} \frac{z}{(\theta^2 - 1)^{3/2}}} & \left\{ \frac{\exp [i (sc \sqrt{\theta^2 - 1} (z/c) - \pi/4)]}{y_0 - \chi} - \frac{\exp [-i (sc \sqrt{\theta^2 - 1} (z/c) - \pi/4)]}{y_0 + \chi} \right\} + \\ & + f_m H \left(t - \frac{z}{c} \theta_s \right) \exp \left[i \left(\chi t - \sqrt{\chi^2 - s^2 c^2} \frac{z}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

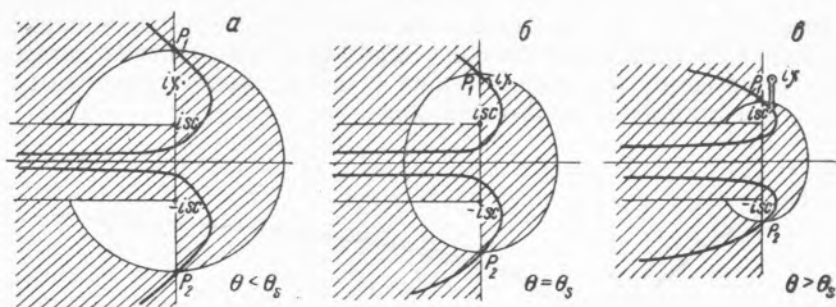


Рис. 1

Однако фронт волны при этом из рассмотрения исключается. Его можно рассмотреть следующим образом. Разложим показатель в ряд

$$pt - \frac{z}{c} \sqrt{p^2 + s^2 c^2} = p\tau - \frac{s^2 c^2}{2} \frac{z}{c} \frac{1}{p} - O\left(\frac{1}{p^3}\right).$$

Интегрируя вокруг бесконечно удаленной точки, можно пренебречь членами порядка $1/p^3$. По сравнению с большими p , для малых $\tau = t - z/c$ можно пренебречь также χ . Тогда, заменяя независимую переменную по формуле $p = \sqrt{(s^2 c^2 / 2\tau)} (z/c) v$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_m}{dz} \approx \frac{f_m}{2\pi i} \int_{(\infty+)}^{\infty} \exp \left[\sqrt{\frac{s^2 c^2}{c} \frac{z}{\tau}} \left(v - \frac{1}{v} \right) \right] \frac{dv}{v} = \\ = f_m J_0 \left(sc \sqrt{2 \frac{z}{c} \left(t - \frac{z}{c} \right)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, можно проследить уменьшение ширины пика (рис. 1) по мере продвижения фронта вдоль оси волновода.

Из дискуссии формул (13) и (14) и из рассмотрения характера изменения пути интегрирования при перемещении седловых точек (рис. 1) можно сделать качественные выводы о форме зависимости $d\psi(z, t)/dz$. Из (10) видно, что седловые точки лежат на таком значении $p = \pm iy$, для которых групповая скорость равна z/t . Так как подинтегральное выражение рассматривается именно в этих точках, то можно сказать, что в каждый момент времени t в точку z приходят волны, возбуждаемые такими гармоническими составляющими

сплошного спектра колебаний излучателя, групповая скорость для которых равна z/t .

Амплитуда волны для θ немного больших единицы очень мала, а частота велика. При возрастании θ , т. е. при удалении от фронта, амплитуда медленно растет, а частота уменьшается. При некотором $\theta = \theta_s$ контур интегрирования пересекает полюс $p = i\chi$. При этом уже нельзя пренебрегать точками на контуре, близкими к полюсу, и формула (13) в окрестности этого θ_s неверна. Амплитуда довольно быстро приобретает стационарное значение. Начиная с этого θ_s , кроме интегрирования в седловых точках, нужно интегрировать по контуру, обходящему полюс. По определению Бриллюэна⁽³⁾, этот момент является моментом прихода сигнала, скорость которого равна c/θ_s . Можно сказать, что на стационарный процесс, который обусловлен наличием полюса, накладываются последствия резкого включения, связанные с интегрированием в седловых точках. Последствие резкого включения остается и после прихода стационарной составляющей со скоростью сигнала, и, таким образом, после прихода стационарной составляющей со скоростью сигнала, благодаря присутствию низко-частотных компонент, возможны также θ , когда амплитуда волны будет больше, чем стационарная амплитуда.

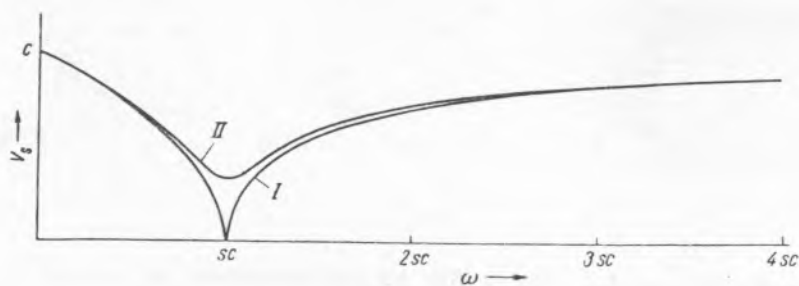


Рис. 2

Установим зависимость между скоростью сигнала и частотой колебаний излучателя. При отсутствии затухания в среде эта зависимость, согласно (12), имеет вид

$$V_s = c \sqrt{1 - \frac{s^2 c^2}{\omega^2}} \quad \text{для } \omega \geq sc, \quad V_s = c \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{s^2 c^2}} \quad \text{для } \omega \leq sc. \quad (15)$$

Кривая этой зависимости изображена на рис. 2. Кривая I соответствует отсутствию затухания, а кривая II — наличию малого затухания.

Таким образом, для нераспространяющихся типов волн ($\omega < sc$), где групповая скорость не имеет смысла, вводится понятие скорости сигнала, характеризующей скорость проникновения стационарного состояния в волновод. Для распространяющихся типов волн введенная скорость сигнала при малом затухании мало отличается от групповой скорости, а при отсутствии затухания — совпадает с ней.

Автор считает своим долгом выразить благодарность проф. П. Е. Краснушкину, под руководством которого была выполнена работа, и П. И. Кузнецову за ряд ценных указаний.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ П. И. Кузнецов, Прикл. матем. и мех., 11, в. 2 (1947). ² G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1945. ³ L. Brillouin, Ann. der Physik, 44, No. 10 (1914).