Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 4

ФИЗИКА

С. З. БЕЛЕНЬКИЙ

О «РАВНОВЕСНОМ СПЕКТРЕ» ЛАВИННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 1 VI 1948)

1. В статье, опубликованной в Physical Review, № 4 за 1948 г. ([1]), Бернардини, Каччипиоти и Кверцелли вычисляют электронную компоненту космических лучей на уровне моря с помощью функции, дающей полное (проинтегрированное по всей длине ливня) число электронов с энергией больше данной (E), созданных первичным электроном с энергией E_0. Авторы используют следующее выражение для этой функции:

$$N(E_0,\ E,\ E_c) = \frac{E_0}{\beta}\left\{1 - \frac{E}{E_0}\, e^{-2(E_0-E)/E_c} - \frac{2E}{E_c}\, e^{2E/E_c}\left[\varepsilon_i\left(-\frac{2E_0}{E_c}\right) - \varepsilon_i\left(-\frac{2E}{E_c}\right)\right]\right\}, \tag{1}$$

где β — ионизационные потери, E_0 — критическая энергия.

Вывод формулы (1) авторы приписывают Ферретти (1942) ([2]). Между тем, впервые функция для равновесного спектра лавинных электронов была выведена в 1939 г. в работе И. Тамма и С. Беленького (см. ([3],[4])). Нетрудно убедиться, что „равновесный спектр“ Ферретти очень мало отличается от спектра, опубликованного в работе ([3]). Действительно, согласно формуле (8,9) этой работы, имеем:

$$N(E_0,\ E) = \frac{1}{q}\, \varepsilon_0\, \varepsilon\, e^{\varepsilon} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{e^{-x}}{x^2}\, dx, \tag{2}$$

где $\varepsilon_0 = q\,\frac{E_0}{\beta}$, $\varepsilon = q\,\frac{E}{\beta}$, q — постоянная величина, равная 2,29.

Выражения (1) и (2) совпадают, если в формуле (1) положить $E_c = \beta$, а в формуле (2) положить q равным 2 (а не 2,29).

Как выяснится из дальнейшего, формула (2) является более точной. Ферретти ([2]), повидимому, не знавший работы ([3]), пришел к формуле (1), приближенно решая уравнение, выражающее закон сохранения энергии для лавинных частиц. Метод Ферретти интересен тем, что позволяет более точно, чем это делалось до сих пор, оценить погрешность аналитического выражения (2) для равновесного спектра. В работе Ферретти, однако, подобной оценки не делается. Более того, при решении уравнения, вместо точных выражений для дифференциальных сечений, используются приближенные, что не является необходимым.

Целью настоящей работы является оценка точности, с которой функция (2) представляет равновесный спектр лавинных электронов.

2. Пусть $P(E_0, E)$ — число электронов в интервале энергий E, $E+dE$, проинтегрированное по всей длине ливня; пусть, далее, $\Gamma(E_0, E)$ — соответствующее число фотонов.

Допустим, что на слой вещества падает первичный электрон с энергией E_0 и примем во внимание следующие процессы:

а) радиационное торможение электронов, вероятность которого равна $W_e(E, E')$, где E — энергия электрона, а E' — излученного фотона;

б) образование пар фотонами, вероятность чего равна $W_p(E', E)$, где E' — энергия фотона, а E — образованного позитрона;

в) ионизационные потери для электронов, которые будем считать не зависящими от энергии.

В качестве единицы длины мы выбираем, как обычно, радиационную единицу.

Уравнения для $P(E_0, E)$ и $\Gamma(E_0, E)$ имеют, как нетрудно убедиться, следующий вид (см. [3]):

$$\delta(E-E_0)+\int_E^\infty P(E')W_e(E', E'-E)\,dE'+2\int_E^\infty \Gamma(E')W_p(E', E)\,dE'-$$
$$-P(E)\int_0^E W_e(E, E')\,dE'+\beta\frac{\partial P}{\partial E}=0, \tag{3}$$

$$\int_E^\infty P(E')W_e(E', E)\,dE'-\sigma\Gamma(E)=0. \tag{4}$$

Здесь δ — „дельта-функция" Дирака, σ — коэффициент поглощения фотонов. Из уравнений (3) и (4) можно исключить функцию распределения фотонов $\Gamma(E)$. Умножив затем получившееся уравнение на E и произведя интегрирование от E до ∞, получим следующее уравнение, выражающее сохранение энергии лавинных частиц (см. [2]):

$$E_0-\int_E^\infty \frac{\partial N(E')}{\partial E'}\varphi(E', E)\,dE'+\beta E\frac{\partial N(E)}{\partial E}-\beta N(E)=0, \tag{5}$$

где

$$N(E)=\int_E^\infty P(E')\,dE',$$

а

$$\varphi(E', E)=2\int_E^{E'} E''dE''\int_{E''}^{E'} d\varepsilon\,\frac{W_e(E', \varepsilon)\,W_p(\varepsilon, E'')}{\sigma(\varepsilon)}+$$
$$+\int_E^{E'} E''W_e(E', E'-E'')\,dE''-E'\int_0^{E'} W_e(E', E'')\,dE''. \tag{6}$$

Для $W_e(E, E')$ и $W_p(E', E)$ примем следующие выражения, являющиеся точными при больших энергиях:

$$W_e(E, E')=\frac{1}{E'}\left[\alpha-\alpha\frac{E'}{E}+\left(\frac{E'}{E}\right)^2\right], \tag{7}$$

$$W_p(E', E)=\frac{1}{E'}\left[\alpha\left(\frac{E}{E'}\right)^2-\alpha\frac{E}{E'}+1\right], \tag{8}$$

где $\alpha=1{,}36$. Тогда $\sigma=\sigma_0=0{,}773$.

Подставив выражения (7) и (8) в формулу (6) и произведя необходимые интегрирования, получим:

$$\varphi(E', E) = Ef(x), \tag{9}$$

где $x = E/E'$ и

$$f(x) = -1{,}36 + 0{,}327x + 1{,}21x^2 + 0{,}68x^3 + 1{,}36\frac{\ln(1-x)}{x} - \\ - 1{,}17x^2\ln x - 1{,}76x\ln x. \tag{10}$$

Из табл. 1 значений функции $-f(x)$ видно, что $-f(x)$ обладает минимумом при $x \sim 0{,}5$. Минимальное значение $-f(x)$ равно 1,88. При изменении x от 0 до 0,9 $f(x)$ не очень сильно меняется.

Таблица 1

x	$-f(x)$	x	$-f(x)$
0	2,72	0,5	1,88
0,1	2,32	0,6	1,904
0,2	2,12	0,7	2,00
0,3	1,99	0,8	2,23
0,4	1,91	0,9	2,80
		1	∞

При подстановке (9) в уравнение (5) получим:

$$E_0 - E\int_E^\infty \frac{\partial N(E')}{\partial E'} f\left(\frac{E}{E'}\right) dE' + \\ + \beta E\frac{\partial N(E)}{\partial E} - \beta N(E) = 0. \tag{5'}$$

Задача заключается в том, чтобы решить это уравнение.

3. Запишем уравнение (5') в следующем виде:

$$E_0 - Eq(E)N(E) + \beta E\frac{\partial N(E)}{\partial E} - \beta N(E) = 0, \tag{11}$$

где

$$q(E) = \frac{\int_E^\infty \frac{\partial N}{\partial E'} f\left(\frac{E}{E'}\right) dE'}{N(E)}. \tag{12}$$

Положим, в качестве первого приближения, что $q(E)$ постоянно. Для больших энергий это предположение в точности выполняется. Действительно, в работе [3] (формула 8,7) было показано, что для энергий E, больших β и меньших E_0, функция N равна:

$$N = \frac{1}{2{,}29}\,\frac{E_0}{E}. \tag{13}$$

Подставив выражение (13) в формулу (12), получим:

$$q(E) = \frac{-\int_E^\infty \frac{1}{E_1^2} f\left(\frac{E}{E_1}\right) dE_1}{1/E} = -\int_0^1 f(x)\,dx = 2{,}29. \tag{14}$$

Допустим, что $q(E)$ мало изменяется с энергией и для энергий меньших критической. Решая уравнение (11) при постоянном q, мы, как можно убедиться, в качестве решения получим функцию (2) (которая удовлетворяет „граничному“ условию $N(E_0) = 0$).

Подставляя функцию (2) в уравнение (12), мы можем проверить, как выполняется предположение о слабой зависимости $q(E)$ от энергии при малых E. Оказывается, что при $E \simeq 0{,}043\beta$ $q(E) = 2{,}23$. Таким образом, при изменении E в огромном диапазоне от нескольких сот β до $0{,}05\beta$ $q(E)$ меняется всего на 2,6 %.

Число частиц с энергией, большей E, дается, согласно формуле (2), выражением $N = \frac{E_0}{\beta}\chi(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \frac{qE}{\beta}$. Вследствие того, что q не является постоянной величиной, более точно было бы считать $N = \frac{E_0}{\beta}\chi(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 = \frac{q(E)E}{\beta}$. Так как $q(E)$ мало отличается от q, то погрешность ΔN, возникающая при использовании формулы (2), следующим образом связана с величиной $\Delta q = q(E) - q$:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\chi'(\varepsilon)\,\varepsilon}{\chi(\varepsilon)}\,\frac{\Delta q}{q} = \gamma\,\frac{\Delta q}{q}. \tag{15}$$

При $E = 0{,}043\beta$ $(\varepsilon = 0{,}1)$ $\gamma = -0{,}15$; при $E = 0{,}43\beta$ $(\varepsilon = 1)$ $\gamma = -0{,}25$.

Так как отношение $\Delta q/q \sim -0{,}06/2{,}29 = -0{,}026$, то

$$(\Delta N/N)_{\varepsilon=0,1} \simeq 0{,}0045, \quad \text{а} \quad (\Delta N/N)_{\varepsilon=1} \simeq 0{,}0075.$$

В настоящей работе показано, что выражение (2) является достаточно строгим решением уравнения (5'). Однако уравнение (5') не учитывает изменения сечения для образования пар и радиационного торможения при малых энергиях, комптон-эффект и т. д. Влияние этих факторов рассмотрено в работах ([4],[5]), где показано, что вплоть до энергий порядка $0{,}1\beta$ они не играют существенной роли.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР

Поступило
26 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Bernardini, B. Caccipuoti and R. Querzelli, Phys. Rev., **73**, No. 4 (1948). [2] B. Ferretti, La Ricerea Scientifica, **10**, 532 (1942). [3] И. Тамм и С. Беленький, J. of Physics, **1**, 3, 177 (1939). [4] Ig. Tamm and S. Beenky, Phys. Rev., **70**, 660 (1946). [5] С. З. Беленький, Лавинные процессы космических лучах, 1948.