Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ УПРУГИХ И ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 19 VI 1948)

1. Введем следующие обозначения: σ_{ik} и σ^{ik} — ко- и контрвариантные составляющие тензора напряжений; ε_{ik} и ε^{ik} — ко- и контрвариантные составляющие тензора деформаций; u_k и u^k — ко- и контрвариантные составляющие вектора перемещений; p_k и p^k — ко- и контрвариантные составляющие вектора объемной силы; ∇_i и ∇^i — знаки ко- и контрвариантного дифференцирования.

Кроме того, возьмем линейный и квадратичный инварианты тензора деформаций в следующей форме

$$I_1 = g_{ik}\varepsilon^{ik}, \qquad I_2 = g_{ia}g_{kb}\varepsilon^{ik}\varepsilon^{ab}. \tag{1,1}$$

Рассмотрим обратимый изотермический процесс деформации сплошной среды. Ограничиваясь „малыми“ деформациями, мы можем отнесенную к единице объема плотность свободной энергии F принять зависимой только от линейного и квадратичного инвариантов тензора деформаций и абсолютной температуры T (свободная энергия является скаляром).

Тогда, в соответствии с известным термодинамическим соотношением, мы можем написать

$$\sigma^{ik} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} g^{ik} + 2\,\frac{\partial F}{\partial I_2}\,\varepsilon^{ik}. \tag{1,2}$$

Тензор напряжений σ^{ik} имеет два следующих инварианта:

$$\Pi_1 = g_{ik}\sigma^{ik}, \qquad \Pi_2 = g_{ia}g_{kb}\sigma^{ik}\sigma^{ab}. \tag{1,3}$$

Воспользовавшись соотношением (1,2), легко получить следующие общие связи между инвариантами тензоров напряжений и деформаций:

$$\Pi_1 = 3\,\frac{\partial F}{\partial I_1} + 2I_1\frac{\partial F}{\partial I_2},$$

$$\Pi_2 = 3\left(\frac{\partial F}{\partial I_1}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial F}{\partial I_1}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial I_2}\right)I_1 + 4\left(\frac{\partial F}{\partial I_2}\right)^2 I_2. \tag{1,4}$$

Инварианты тензоров напряжений и деформаций, а также абсолютная температура, кроме того, связаны уравнением состояния сплошной среды

$$\Psi(I_1, I_2, \Pi_1, \Pi_2, T) = 0, \tag{1,5}$$

получаемым экспериментально или на основании гипотетических предположений о свойствах среды.

Подставив (1,4) в (1,5), мы получим нелинейное дифференциальное уравнение 1-го порядка для свободной энергии

$$\Phi\left(I_1, I_2 \frac{\partial F}{\partial I_1}, \frac{\partial F}{\partial I_2}, T\right) = 0. \tag{1,6}$$

Для полной определенности задачи необходимо задать условия Коши

$$\begin{gathered} I_1(a), \qquad I_2(a), \qquad F(a) \\ \frac{\partial F}{\partial I_1} = \varphi_1(a), \qquad \frac{\partial F}{\partial I_2} = \varphi_2(a) \end{gathered} \tag{1,7}$$

таким образом, чтобы удовлетворялись тождественно относительно параметра a: во-первых, условие полоски

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial I_1}\frac{dI_1}{da} + \frac{\partial F}{\partial I_2}\frac{dI_2}{da} \tag{1,8}$$

и, во-вторых, само уравнение (1,6).

Мы приходим таким образом к выводу, что для полного описания процесса деформации сплошной среды должны быть заданы, наряду с уравнением состояния (1,5), еще условия Коши (1,7) для какого-либо частного вида деформации, зависящей от одного параметра. Заметим теперь, что, аналогично тому, как это сделано выше для свободной энергии, могут быть составлены дифференциальные уравнения для других термодинамических функций деформации сплошной среды.

Этот же метод легко обобщается на случай конечных деформаций.

2. Применим метод, развитый в § 1 настоящей заметки, к некоторым частным задачам,

Остановимся прежде всего на теории пластичности Генки — Мизеса. Как известно (1), уравнения теории пластичности Генки — Мизеса являются уравнениями некоторой идеальной нелинейно упругой среды. Тем не менее, как показывают экспериментальные данные, эти уравнения могут быть применены к описанию пластических деформаций при обязательном условии различия процесса нагружения тела от процесса его разгрузки.

Таким образом, если ограничиться рассмотрением только процесса нагружения тела, мы можем к анализу его пластических деформаций применить основные термодинамические соотношения, характеризующие обратимые процессы.

Подобного рода анализ был проведен Л. М. Качановым (1), причем им были получены уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций в прямоугольных декартовых координатах (обратные соотношения Генки).

В настоящей заметке мы, следуя другому методу, развитому в § 1, получаем все уравнения как теории пластичности Генки — Мизеса, так и среды с упрочнением в произвольных криволинейных координатах.

Уравнение состояния пластической среды Генки — Мизеса (условие пластичности Мизеса) может быть записано в следующем виде:

$$3\,\Pi_2 - \Pi_1^2 = \text{const}. \tag{2,1}$$

Подставив (1,4) в (2,1), получим

$$(3I_2 - I_1^2)\left(\frac{\partial F}{\partial I_2}\right)^2 = \text{const}, \tag{2,2}$$

откуда

$$F = f(I_1) + A\sqrt{3I_2 - I_1^2}. \tag{2,3}$$

Уравнение (2,2) является дифференциальным уравнением свободной энергии пластической деформации, а (2,3) — его общим интегралом.

Входящая в (2,3) функция f произвольна в достаточно широком смысле этого слова и величина $A = \text{const}$.

Подставив (2,3) в (1,2), мы получим различные (в зависимости от вида функции f) уравнения, связывающие тензор деформаций с тензором напряжений. Для всех этих видов связи условие пластичности Мизеса удовлетворяется само собой.

Выберем функцию f так, чтобы объемная деформация была упругой в смысле классической теории упругости, иными словами, положим $f = I_1^2 / 6k$, где k — модуль упругого объемного сжатия, и, кроме того, положим $A = \frac{2}{3}\tau_s$, где τ_s — предел текучести при сдвиге.

Тогда связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций примет следующий окончательный вид:

$$\sigma^{ik} = \frac{I_1}{3k} g^{ik} + \frac{2}{3}\frac{\tau_s}{\sqrt{3I_2 - I_1^2}}(3\varepsilon^{ik} - g^{ik} I_1). \tag{2,4}$$

В частном случае прямоугольных декартовых осей координат мы получим:

$$\sigma^{11} = \sigma_{11} = \frac{I_1}{3k}\delta_{11} + \frac{4\tau_s}{3\sqrt{3I_2 - I_1^2}}\left[\varepsilon_{11} - \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right]\ldots \tag{2,5}$$

здесь $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$ (δ_{ik} — единичный тензор).

Уравнения (2,5) являются известными обратными соотношениями Генки.

Имея уравнения (2,4), легко написать уравнения пластического равновесия в смещениях аналогично уравнениям Ляме в теории упругости.

Эти уравнения будут иметь вид:

$$\nabla_i\left[\frac{I_1}{3k} g^{ik} + \frac{2}{3}\frac{\tau_s}{\sqrt{3I_2 - I_1^2}}(3\,\varepsilon^{ik} - g^{ik} I_1)\right] + p^k = 0,$$

где $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_k + \nabla_k u_i)$.

Легко получить аналогичные уравнения для упрочняющейся среды. Приняв закон упрочнения в виде

$$3\,\Pi_2 - \Pi_1^2 = 36\,\varphi(\sqrt{3\,I_2 - I_1^2})^2,$$

получим:

$$\nabla_i \left[\frac{I_1}{3k} g^{ik} + 2 \frac{\varphi\left(\sqrt{3I_2 - I_1^2}\right)}{\sqrt{3I_2 - I_1^2}} (3\,\varepsilon^{ik} - g^{ik} I_1) \right] + p^k = 0 .$$

Поступило
8 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Качанов, Прикладн. матем. и мех., **5**, в. 3 (1941).