Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 14 X 1948)

В настоящей статье мы укажем прием, позволяющий приближенно и достаточно эффективно решать некоторые частные задачи теории упругости и гидродинамики. К ним, например, относятся кручение и изгиб полых призматических брусьев, сечения которых являются некоторыми двусвязными областями, плоские задачи теории упругости для областей аналогичного же вида и ряд других вопросов. Сущность приема поясним на следующей задаче.

Рассмотрим скручиваемый моментом M полый цилиндр постоянного поперечного сечения S, ограниченного извне окружностью L_1 радиуса R, а изнутри — эллипсом L_2 с тем же центром, что у окружности, и с большей и с меньшей полуосями, соответственно, a и b. Обход кривых L_1 и L_2 условимся считать совершающимся в положительном направлении относительно области S. Далее, начало координат поместим в центре фигуры S и направим координатные оси x и y соответственно по большой и малой полуосям эллипса.

Определение деформации и напряжений в указанном цилиндре сводится к отысканию функции $\varphi_1(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ (однозначной и) регулярной в области S из предельных условий

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = 0 \qquad \text{на } L_1; \tag{1}$$

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t\bar{t} + C \quad \text{на } L_2, \tag{2}$$

где t — аффикс точки L_1 или L_2 и C — некоторая постоянная. Положив на окружности L_1

$$\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)} = 2\omega(t), \tag{3}$$

введем на ней функцию*

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \lim_{z\to t} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z}\, dt_1 = \lim_{z\to t} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z}\, dt_1, \tag{4}$$

где стремление к пределу в первом интеграле происходит изнутри L_1, а во втором интеграле — извне L_1. Из равенств (4) следует, что функция $\varphi(z)$ аналитически продолжима и регулярна всюду вне L_2 и

* Вторая из формул (4) вытекает из равенств (1) и (3).

обращается в нуль на бесконечности. Записав теперь условие (2) в форме

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\omega(t_1)\left\{\frac{dt_1}{t_1-t}+\frac{\overline{dt}}{\bar{t}_1-\bar{t}}\right\}+t\bar{t}+C \qquad (5)$$

и затем используя функцию

$$z=A\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right), \qquad (6)$$

конформно отображающую внешность эллипса L_2 на внешность круга радиуса $\rho>1$ в плоскости ζ (A — некоторая фиксированная постоянная), легко получим

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A}{R}\right)^k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\omega(t)\left[\sum_{k_1=0}^{E(k)}C_k^{k_1}\left\{\left(\frac{R}{t}\right)^k\frac{1}{\zeta^{k-2k_1}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{t}{R}\right)^k\left(\frac{\rho^2}{\zeta}\right)^{k-2k_1}\right\}\right]\frac{dt}{t}+\frac{A^2\rho^2}{\zeta^2}; \qquad (7)$$

$$A^2\left(\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\right)+C=\sum_{k=0,\,2,\dots}^{\infty}A^kC_k^{k/2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\omega(t)\left\{\frac{dt}{t^{k+1}}+\frac{\overline{dt}}{\bar{t}^{k+1}}\right\}, \qquad (8)$$

причем $E(k)$ равно либо $\frac{k}{2}-1$, либо $\frac{k-1}{2}$, в зависимости от того, четное или нечетное k, и переменную ζ в правой части (7) следует выразить через z согласно формуле (6). Отсюда, возвращаясь к (3), получим, после некоторых преобразований, для определения $\omega(t)$ интегральное уравнение

$$-\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)}{t}dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)}{t}dt\sum_{k_1=0}^{E(k)}C_k^{k_1}\left[\left(\frac{R}{t}\right)^k\left\{\frac{1}{\tau_0^{k-2k_1}}-\left(\frac{\rho^2}{\bar{\tau}_0}\right)^{k-2k_1}\right\}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{t}{R}\right)^k\left\{\frac{1}{\bar{\tau}^{k-2k_1}}-\left(\frac{\rho^2}{\tau_0}\right)^{k-2k_1}\right\}\right]=A^2\rho^2\left(\frac{1}{\bar{\tau}_0^2}-\frac{1}{\tau_0^2}\right), \qquad (9)$$

где $\tau(\tau_0)$ — аффикс точки некоторой кривой в плоскости ζ, отображающей окружность L_1. Отбросим в левой части последнего уравнения имеющее вид функционала второе слагаемое. Это допустимо, так как $\omega(t)$ на основании (3) определяется с точностью до чисто мнимой постоянной. Вновь полученное уравнение будет, очевидно, разрешимо при $\lambda=0$ для любой правой части. Следовательно, оно будет также иметь решение для достаточно малых по модулю значений параметра λ, представимое в форме

$$\omega(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\omega_k(t), \qquad (10)$$

где $\omega_k(t)$ — некоторые функции. Подставив $\omega(t)$ из последнего равенства в уравнение (9) и приравняв выражения при одинаковых степенях λ, последовательно найдем все $\omega_k(t)$. Из них $\omega_{2k-1}(t)=0$ и

$$\omega_0(t)=A^2\rho^2\left(\frac{1}{\tau^2}-\frac{1}{\bar{\tau}^2}\right),\quad \omega_{2k}(t)=\sum_{n=1}^{k}a_k^{(n)}\left(\frac{1}{\tau^{2n}}-\frac{1}{\bar{\tau}^{2n}}\right)$$
$$(k=1,\ldots,\infty), \tag{11}$$

где коэффициенты $a_k^{(n)}$ — постоянные величины. Выпишем их значения для функции $\omega_{2k}(t)$ $(k=1,\ldots,6)$:

$$\begin{aligned}
&a_1^{(1)}=c_{11},\quad a_2^{(1)}=c_{21}(\rho^4+9),\quad a_2^{(2)}=2c_{22},\quad a_3^{(1)}=c_{31}(\rho^8+18\rho^4+92),\\
&a_3^{(2)}=2c_{32}(\rho^4+16),\quad a_3^{(3)}=5c_{33},\quad a_4^{(1)}=c_{41}(\rho^{12}+35\rho^8+265\rho^4+1031),\\
&a_4^{(2)}=c_{42}(4\rho^8+50\rho^4+442),\quad a_4^{(3)}=c_{43}(5\rho^4+117),\quad a_4^{(4)}=14c_{44},\\
&a_5^{(1)}=c_{51}(\rho^{16}+52\rho^{12}+775\rho^8+3718\rho^4+12294),\\
&a_5^{(2)}=c_{52}(4\rho^{12}+148\rho^8+914\rho^4+5966),\ a_5^{(3)}=c_{53}(13\rho^8+162\rho^4+2055),\\
&a_5^{(4)}=14c_{54}(\rho^4+31),\quad a_5^{(5)}=42c_{55},\\
&a_6^{(1)}=c_{61}(\rho^{20}+77\rho^{16}+1585\rho^{12}+14374\rho^8+51610\rho^4+153193),\\
&a_6^{(2)}=c_{62}(6\rho^{16}+230\rho^{12}+3560\rho^8+14950\rho^4+80754),\\
&a_6^{(3)}=c_{63}(18\rho^{12}+559\rho^8+3568\rho^4+32755),\quad a_6^{(4)}=c_{64}(42\rho^8+560\rho^4+9286),\\
&a_6^{(5)}=c_{65}(42\rho^4+1626),\quad a_6^{(6)}=132c_{66},\\
&c_{kn}=A^2\rho^2\lambda^{2k}(1+\rho^{4n}),\quad \lambda=A/R.
\end{aligned} \tag{12}$$

В форме же (10) будем искать решение уравнения (9) для интересующих нас значений параметра λ. Поступая таким образом, мы (внося иногда несложные модификации) во многих случаях придем к практически удовлетворительным результатам.

Произведем расчет для конкретного случая, когда область S резко отличается от кругового кольца, а ее границы в некоторой части достаточно близки друг к другу. Возьмем $a=3b$, $R=4b$, при этом $\lambda=1/2\sqrt{2}$. Ограничившись в формуле (10) семью первыми слагаемыми*, вычислим коэффициенты $a_k^{(n)}$ $(n=1,\ldots,k;\, k=1,\ldots,6)$. Далее, заметив, что, начиная с некоторого k, они (будучи по сравнению с их значениями для предшествующих k малыми по величине) убывают с увеличением k (для одного и того же n) довольно медленно и примерно по закону геометрической прогрессии, учтем в достаточной мере точно влияние** отбрасываемых $\omega_k(t)$ на слагаемые вида (11), удержанные в выражении (10) для $\omega(t)$. После этого, проделав требуемые выкладки, будем иметь

$$\omega(t)=\sum_{n=1}^{6}a_n\left(\frac{1}{\tau^{2n}}-\frac{1}{\bar{\tau}^{2n}}\right), \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1&=2{,}196985656\,A^2, & a_2&=0{,}023728128\,A^2,\\
a_3&=0{,}004032395\,A^2, & a_4&=0{,}000812796\,A^2,\\
a_5&=0{,}000241107\,A^2, & a_6&=0{,}000074547\,A^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Используя теперь, наряду с (13), первое из равенств (4) и формулу (7), получим приближенное выражение для искомой функции

---

* Взяв в (10) функции $\omega_k(t)$ непосредственно в виде (11), мы получим общее выражение для $a_k^{(n)}$ через коэффициенты всех предшествующих $\omega_k(t)$. Оно может позволить в нужном случае учесть влияние так называемых главных членов, содержащихся в возможно большем числе функций $\omega_k(t)$.

** Впрочем, это влияние весьма незначительно и им можно пренебречь без заметного ущерба для точности $\omega(t)$.

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=1}^{6} a_n \left[\left\{ \frac{z - \sqrt{z^2 - 4A^2}}{2A} \right\}^{2k} - \left\{ \frac{R^2 - \sqrt{R^4 - 4A^2 z^2}}{2Az} \right\}^{2k} \right]. \qquad (15)$$

Из (8) найдем, что $C = -2{,}652258552\ A^2$. На основании известной формулы получим, что жесткость на кручение $D = 0{,}4345282\ \mu\pi R^4$, где μ — модуль сдвига.

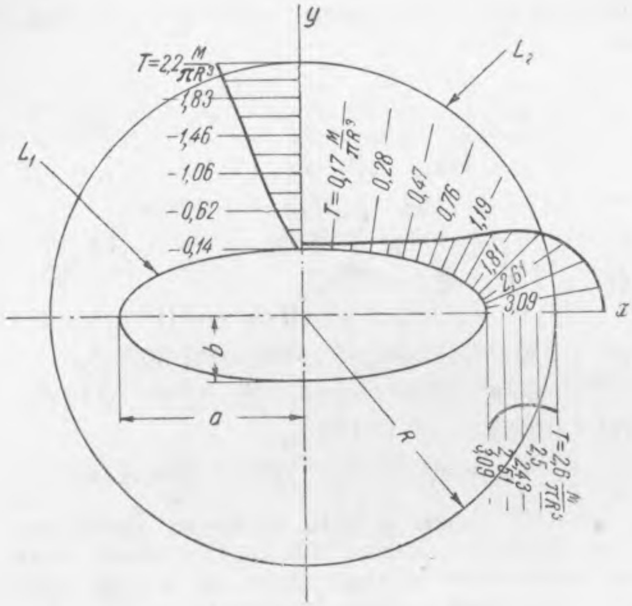

Рис. 1

Нетрудно усмотреть, что функция $\varphi_1(z)$, определяемая равенством (15), точно удовлетворяет граничному условию (1) на L_1. Граничному же условию (2) на L_2 она удовлетворяет с большой степенью точности. На это указывают величины

$$\Delta = \frac{t\bar{t} - \{\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} - C\}}{t\bar{t}}\, 100\%,$$

характеризующие в процентах отклонение от (2) и подсчитанные для 5 значений полярного угла ϑ на окружности $\rho = \sqrt{2}$ в плоскости ζ, соответствующих некоторым точкам эллипса в первом квадранте.

ϑ	0°	22° 30′	45°	67° 30′	90°
Δ	0,00083	0,00056	—0,00051	—0,00175	—0,00334

На рис. 1 приведены эпюры касательных напряжений в точках поперечного сечения, лежащих на координатных осях и на границе L_2. При подсчете напряжений были учтены обеспечивающие достаточную точность лишь 3 первых слагаемых в формуле (15).

Примечание. Отметим, что аналогично тому, как выше, может быть рассмотрен более общий случай, когда эллипс расположен несимметрично относительно окружности. Наконец, подобным же образом может быть изучено кручение армированных цилиндров — эллиптического и полого, сечение которого ограничено извне окружностью, а изнутри — эллипсом, когда материал, заполняющий каждый из цилиндров, однороден, но имеет отличные от другого упругие свойства.

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
6 X 1948