Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. А. ШЕСТАКОВ и А. У. ПАЙВИН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 X 1948)

Дана нелинейная система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где a_{ik} — постоянные, $\varphi_i(0, 0, \ldots, 0, t) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Функции φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определены в области $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$, $-\infty < t < +\infty$, где G — некоторая окрестность начала координат O, непрерывны по t и удовлетворяют условию: при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти два положительных числа δ_ε и T_ε таких, что из условий $|x_i'| < \delta_\varepsilon$, $|x_i''| < \delta_\varepsilon$, $t \geqslant T_\varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вытекают неравенства:

$$|\varphi_i(x_1', x_2', \ldots, x_n', t) - \varphi_i(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'', t)| \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j' - x_j''|$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти условия будем называть основными условиями.

Определение 1. Решение $x_i = x_i(t_0, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1) назовем 0-кривой при $t \to +\infty$, если, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдутся такие числа T_1 и T_2, что, если $t_0 \geqslant T_1$, $t \geqslant T_2$, то $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \varepsilon$.

Аналогично вводится понятие 0-кривой при $t \to -\infty$.

Целью заметки является:

1) доказательство формулы

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \exp t\,[\alpha_k + \eta(t)] \tag{2}$$

для любой 0-кривой $x_i(t_0, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1), где $\alpha_k < 0$ — вещественная часть корня λ_k характеристического уравнения

$$|a_{ik} - \delta_{ik}\lambda| = 0, \quad \delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ij} = 0, \quad i \neq j \tag{3}$$

и функция $\eta(t)$ обладает свойством:

$$\lim_{t \to \infty} \eta(t) = 0; \tag{4}$$

2) вывод формулы, характеризующей асимптотическое поведение 0-кривых, из которой вытекают: а) качественная теорема И. Г. Петровского ([1]) о ведущих координатах при более слабых ограничениях

на функции φ_i; б) теорема, обобщающая предложение Перрона ([2]) об асимптотическом поведении 0-кривых на случай кратных корней.

Заметим, что из формулы (2) следует

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \sum_{i=1}^{n} |x_i|}{t} = \alpha_k. \tag{5}$$

Верхний предел функции $A(t)$ при $t \to +\infty$ Перрон ([2]) назвал порядковым числом соответствующего решения. Им показано, что порядковые числа 0-кривых системы (1) равны отрицательным вещественным частям корней λ_k уравнения (3).

Теорема 1. *Пусть*

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n, \qquad \alpha_i \neq 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

вещественные части корней уравнения (3), *среди которых имеются отрицательные. Для любой 0-кривой* $x_i(t_0, t)$ *системы* (1) *существует функция* $\eta(t)$, *обладающая свойством* (4), *такая, что*

$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \exp t\,[\alpha_k + \eta(t)], \quad t \geqslant t_0,$ *где* $\alpha_k < 0$ — *одно из чисел ряда* (6).

0-*кривые, удовлетворяющие соотношению*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \exp t\,[\alpha_l + \eta(t)], \quad \alpha_l < 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{7}$$

где функции $\eta(t)$ *удовлетворяют* (4), *образуют семейство с* p *произвольными параметрами, где* p — *число корней* λ_l, *удовлетворяющих неравенству* $\alpha_l \leqslant \alpha_p$.

Доказательство этой теоремы мы опустим.

Относя 0-кривые системы (1), имеющие один и тот же предел (5), к одному классу, мы разобьем все семейство 0-кривых на q классов, где q — число различных $\alpha_i < 0$ уравнения (3).

На основании теоремы 1 легко видеть, что это разбиение на классы совпадает с разбиением на классы, которое сделал другим способом И. Г. Петровский ([1]), приводя систему (1) к жордановой форме.

Определение 2. Пусть m_j корней λ_{k_j+i} $(i=0, 1, \ldots, m_j-1)$ имеют одинаковую вещественную часть α_{k_j}. Целые положительные числа $k_j + i$ $(i=0, 1, \ldots, m_j - 1)$ назовем индексами класса 0-кривых, имеющего порядковое число α_{k_j}.

Число k_j будет наименьшим индексом.

Можно показать, что для каждого индекса k_j существует некоторое конечное число транспозиций вида $\begin{pmatrix} x_{n_1} & x_{n_2} \\ x_{n_2} & x_{n_1} \end{pmatrix}$, которые, после неособого линейного преобразования, систему (1) приводят к виду

$$\begin{gathered} \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \sum_{j=i+1}^{j=k_j-1} b_{ij} y_j + \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) \quad (i=1, 2, \ldots, k_j - 1); \\ \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \sum_{j=i+1}^{j=n} b_{ij} y_j + \sum_{i=1}^{k_j-1} b_{ij} y_j + \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, t) \\ (i=k_j, k_j+1, \ldots, n). \end{gathered} \tag{1'}$$

Систему (1) назовем **системой, присоединенной к системе** (1). Характеристические корни систем (1) и (1') совпадают. Для q индексов k_j мы получим q присоединенных систем вида (1'), которые будем рассматривать совместно с исходной системой (1). О данном классе 0-кривых будем говорить, что он **принадлежит** к соответствующей присоединенной системе.

Определение 3. Координаты y_{k_j+i} $(i=0, 1, \ldots, m_j-1)$ назовем **ведущими координатами** присоединенной системы (1').

Теорема 2. *Для любой 0-кривой класса с индексами* k_j, $k_j+1, \ldots, k_n+m_j-1$ *имеют место асимптотические формулы*:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k_j-1}|y_i|^2}{\sum\limits_{i=k_j}^{k_j+m_j-1}|y_i|^2}=0, \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=k_j+m_j}^{n}|y_i|^2}{\sum\limits_{i=k_j}^{k_j+m_j-1}|y_i|^2}. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначая $r_i^2=|y_i|^2$, имеем:

$$\frac{dr_i^2}{dt}\geqslant 2\alpha_i r_i^2-2br_i\sum_{j=1}^{k_j-1}r_j-2r_i|\psi_i|, \tag{9}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dr_i^2}{dt}\leqslant 2\alpha_i r_i^2+2br_i\sum_{j=1}^{k_j-1}r_j+2r_i|\psi_i|. \tag{10}$$

Для сокращения положено: $\omega_1(t)=\sum\limits_{i=1}^{k_j-1}r_i^2$; $\omega_3(t)=\sum\limits_{i=k_j}^{k_j+m_j-1}r_i^2$;

$\omega_4(t)=\sum\limits_{i=k_j+m_j}^{n}r_i^2$, причем, в силу „основных условий“, имеем

$$|\psi_i|\leqslant\frac{c\varepsilon}{2n}\sum_{i=1}^{n}r_i, \quad t\geqslant T_\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

при некотором фиксированном $c>0$.

Суммируя неравенства (9) и (10) соответственно при $i=1, 2, \ldots$ $\ldots, k_j-1$ и $i=k_j, k_j+1, \ldots, k_j+m_j-1$, находим для производной следующую оценку:

$$\frac{d(\omega_1-\varepsilon\omega_3)}{dt}\geqslant(2\alpha_{k_j-1}-2nb)\,\omega_1-(2\alpha_{k_j}+4nb+2c\varepsilon+2c)\,\varepsilon\omega_3. \tag{12}$$

Так как ε и b достаточно малы, то выберем число c так, чтобы для τ имело место неравенство:

$$\alpha_{k_j-1}-nb>\tau>\alpha_{k_j}+2nb+c\varepsilon+c. \tag{13}$$

Тогда из (12) и (13) следует:

$$\frac{d}{dt}\left[(\omega_1-\varepsilon\omega_3)\exp-2\tau t\right]\geqslant 0, \tag{14}$$

откуда видно, что функция, стоящая в скобках в (14), монотонно возрастает. Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\lim_{t \to +\infty} (\omega_1 + \varepsilon\omega_3) \exp - 2\tau t = 0. \tag{15}$$

Из (14) и (15) для достаточно больших значений t вытекает неравенство

$$\frac{\omega_1(t)}{\omega_3(t)} \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

В силу произвольности ε и $\omega_3 > 0$ соотношение (16) окончательно дает

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\omega_1(t)}{\omega_3(t)} = 0, \tag{17}$$

что доказывает первую формулу (8). Доказательство второй формулы (8) аналогично.

Из теоремы 2 вытекают:

Теорема 3. *0-кривые каждого класса, принадлежащего к соответствующей присоединенной системе* (1'), *касаются гиперплоскости, определяемой ведущими координатами этой системы.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$R(t) = \frac{\omega_1(t) + \omega_4(t)}{\omega_1(t) + \omega_2(t)}, \quad \text{где } \omega_2(t) = \omega_3(t) + \omega_4(t), \tag{18}$$

представляющую сумму квадратов косинусов углов касательной к 0-кривой с осями неведущих координат. Из формул (8) следует

$$\lim_{t \to \infty} R(t) = 0, \tag{19}$$

чем и доказывается теорема.

Теорема 3 доказана также И. Г. Петровским [1], но другим способом и при более сильных ограничениях на функции φ_i: существуют числа $M > 0$, $\alpha > 0$ такие, что в окрестности O имеет место:

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |x_k|^\alpha \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Теорема 4. *Для любой 0-кривой класса с индексами* $k_j, k_j + 1, \ldots, k_j + m_j - 1$ *имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y_s}{\sum\limits_{i=k_j}^{k_j+m_j-1}} = 0, \quad s \neq k_j, \quad k_j + 1, \ldots, k_j + m_j - 1. \tag{20}$$

Формула (20) есть обобщение теоремы Перрона [2] на случай кратных корней.

Пользуемся случаем выразить нашу глубокую благодарность проф. В. В. Немыцкому за помощь и советы при написании статьи.

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Математ. сб., 41, № 1 (1934). [2] O. Perron, Math. Z. 29, 129 (1928).