Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

МЕХАНИКА

А. Л. ЗЕЛЬМАНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ СОПУТСТВУЮЩИХ КООРДИНАТ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

(Представлено академиком В. А. Фоком 17 VI 1948)

1. В классической механике, сверх принятых двух трактовок движения сплошной среды: локальной и субстанциальной, принципиально возможна третья, в дальнейшем называемая унитарной. Последняя требует применения нестатических (вообще говоря) координатных систем, сопутствующих среде. Они аналогичны сопутствующим координатным системам общей теории относительности, значение которых было впервые показано космологическими работами А. А. Фридмана. В сопутствующей системе отсчета, по определению, каждая частица среды сохраняет свои координаты неизменными и, следовательно, кинематика среды совпадает с кинематикой сопутствующего пространства, т. е. пространства сопутствующей системы отсчета. При унитарной трактовке независимыми переменными служат время t и сопутствующие координаты x^1, x^2, x^3. Они совпадают с переменными Лагранжа, причем, однако, $x^1\,(=a)$, $x^2\,(=b)$, $x^3\,(=c)$ не только фиксируют частицы среды, но и служат пространственными координатами, подобно переменным Эйлера. Зависимыми переменными (кроме плотности массы и тензора напряжений) служат метрический тензор сопутствующего пространства h_{ik} и антисимметричный тензор вихря R_{ik}, равный удвоенному тензору мгновенной угловой скорости абсолютного вращения элемента сопутствующего пространства (следовательно, и среды).

В настоящей заметке приходится предполагать, что во всей интересующей нас области изменений независимых переменных (t, x^1, x^2, x^3) R_{ik} и h_{ik} суть голоморфные функции их, а фундаментальный определитель $h = |h_{ik}|$ не обращается в нуль *. Функции $Q_i + P_i$ (см. п. 3 и далее) предполагаются неограниченно дифференцируемыми по всем аргументам (t, x^1, x^2, x^3) и конечными вместе со всеми своими частными производными по ним.

2. Математическим аппаратом изучения движения среды при унитарной трактовке служит трехмерно-тензорное исчисление, примененное к нестатическим пространствам отсчета. В последних можно ввести тензоры скоростей деформации пространства D_{ik}, D_i^k и D^{ik} и скорость относительного объемного расширения элемента пространства

* Разумеется, и при соблюдении этих требований координатные линии сопутствующей системы могут приобрести столь сложную форму, что применение этой системы окажется практически неудобным. Тем не менее, в некоторых случаях (см. п. 6) представляется целесообразной именно унитарная трактовка, и связанные с нею усложнения могут оказаться несущественными.

$D = D_j^j$. Теорема, имеющая основное значение для унитарной трактовки, и ее ближайшие следствия гласят:

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ik}}{\partial t}, \quad D^{ik} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h^{ik}}{\partial t}, \quad D = \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial t}. \tag{1}$$

Рассматривая какое-либо состояние пространства как недеформированное, можно ввести также тензоры деформации пространства E_{ik}, E_i^k и E^{ik} и относительное объемное расширение элемента пространства E. Ограничиваясь здесь случаем бесконечно малых деформаций, можем написать:

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \delta h_{ik}, \quad E^{ik} = -\frac{1}{2} \delta h^{ik}, \quad E = \delta \ln \sqrt{h}, \tag{2}$$

где δ обозначает приращение функции, отвечающее переходу от недеформированного состояния пространства к данному состоянию его.

Из (1) и (2) вытекает ряд следствий.

В дальнейшем нас будут интересовать лишь сопутствующие пространства. Недеформированным состоянием сопутствующего пространства будем считать то, при котором среда не деформирована. Очевидно, величины, описывающие скорости или состояние деформации сопутствующего пространства, совпадают с одноименными величинами, описывающими скорости или состояние деформации среды.

3. Уравнение неразрывности в сопутствующих координатах принимает, вследствие (2), вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \sqrt{h}) = 0, \tag{3}$$

где ρ — плотность массы.

Почленное ковариантное дифференцирование уравнений движения частицы среды, выраженных в сопутствующих координатах, и учет условий евклидовости, теоремы (1) и ее следствий приводят к следующим уравнениям для сопутствующего пространства:

$$\frac{\partial R_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial (Q_k + P_k)}{\partial x^i} - \frac{\partial (Q_i + P_i)}{\partial x^k} \tag{4}$$

(три уравнения изменения вихря) и

$$\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} h^{mn} \left(\frac{\partial h_{im}}{\partial t} + R_{im} \right) \left(\frac{\partial h_{kn}}{\partial t} + R_{kn} \right) = \\ = \nabla_i (Q_k + P_k) + \nabla_k (Q_i + P_i) \tag{5}$$

(шесть уравнений изменения деформации); здесь Q_j и P_j суть, соответственно, внешняя массовая и поверхностная силы, действующие на единицу массы (силы инерции учитываются левыми частями уравнений). Для Q_j и P_j справедливы обычные общековариантные выражения — через потенциал (если он существует) и т. п., через плотность массы и тензор напряжений. Общековариантные выражения тензора напряжений через тензор скоростей деформации или через тензор деформаций также остаются справедливыми в сопутствующих координатах. Но теперь они, в силу теорем (1) и (2) и их следствий, выражают зависимость тензора напряжений от производной (по времени) или приращения метрического тензора.

4. Уравнения (3) — (5) составляют (динамическую) группу основных уравнений, отвечающих унитарной трактовке. Они описывают поведение среды с точностью до произвольного поступательного движения и, соответственно, учитывают действующие силы с точностью до произвольного однородного силового поля. В случае однородного поля члены в правых частях (4) и (5), содержащие Q_j и их производные, исчезают. Из других частных случаев отметим следующие.

Если среда — идеальная баротропная жидкость, а силы Q_j имеют потенциал, то правые части (4) обращаются в нуль: $\frac{\partial R_{ik}}{\partial t}=0$. Отсюда немедленно следуют теоремы о сохранении вихревых линий и напряженности вихревых трубок; обратно, выполнение обеих теорем приводит к указанному равенству.

Если среда — несжимаемая жидкость, то из (3) следует: $\frac{\partial h}{\partial t}=0$.

5. Для начального момента времени должны быть заданы R_{ik}, h_{ik} и $\frac{\partial h_{ik}}{\partial t}$, как функции x^1, x^2, x^3.

Требование евклидовости пространства накладывает на метрический тензор условия:

$$H_{kijl}=0 \quad \text{или} \quad H_{kij}{}^{l}=0, \tag{6}$$

где

$$H_{kij}^{\ \ l}=\frac{\partial \Delta_{jk}^{l}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial \Delta_{ik}^{l}}{\partial x^{j}}+\Delta_{jk}^{m}\,\Delta_{im}^{l}-\Delta_{ik}^{m}\,\Delta_{jm}^{l}; \tag{7}$$

H_{kijl} и $H_{kij}{}^{l}$ — ковариантный и смешанный тензоры кривизны, а Δ_{ij}^{k} — символы Кристоффеля второго рода. Вследствие своего кинематического смысла тензор вихря и производная по времени от метрического тензора должны, при выполнении условий евклидовости, удовлетворять соотношениям:

$$G_{ijk}=0, \tag{8}$$

где

$$G_{ijk}=\frac{1}{2}\left[\nabla_k\left(\frac{\partial h_{ji}}{\partial t}+R_{ji}\right)-\nabla_j\left(\frac{\partial h_{ki}}{\partial t}+R_{ki}\right)\right]. \tag{9}$$

Из определений (7) и (9) следует:

$$\frac{\partial H_{kijl}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i G_{jlk}+\nabla_j G_{ikl}+\nabla_k G_{lji}+\nabla_l G_{kij}+\right.$$
$$\left.+V_i^m H_{jlkm}+V_j^m H_{iklm}+V_k^m H_{ljim}+V_l^m H_{kijm}\right), \tag{10}$$

а в силу (4) и (5) также:

$$\frac{\partial G_{ijk}}{\partial t}=V_i^m G_{mjk}+\frac{1}{2}V_j^m\left(G_{mik}+G_{ikm}+G_{kim}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}V_k^m\left(G_{mji}+G_{imj}+G_{jmi}\right)+\left(Q^m+P^m\right)H_{ijkm}, \tag{11}$$

где обозначено:

$$V_p^m=\frac{1}{2}h^{mn}\left(\frac{\partial h_{pn}}{\partial t}+R_{pn}\right). \tag{12}$$

Из (10) и (11) следует, что выполнение совокупности требований (6) и (8) в начальный момент времени не только необходимо, но, в силу уравнений (4) и (5), и достаточно для выполнения этих требований во все время движения.

6. В случаях, представляющих астрономический интерес, Q_j — сила тяготения. В этих случаях полученные уравнения допускают далеко идущую аналогию с уравнениями поля тяготения общей теории относительности, записанными в сопутствующих координатах. Отметим здесь лишь случай однородных изотропных деформаций однородной среды, аналогичный релятивистским космологическим моделям А. А. Фридмана, явившимся первым применением уравнений поля в сопутствующих координатах к изучению движения материи. В этом случае можно положить:

$$h_{ik} = R^2\delta_{ik}, \qquad R = R(t), \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \tag{13}$$

Уравнение (3) и его интеграл можно записать, соответственно, в виде:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho = 0, \qquad \rho R^3 = \text{const}. \tag{14}$$

(5) дают одно уравнение. Последнее и его первый интеграл могут быть записаны, при учете (14) и уравнения Паусона, соответственно, в виде:

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi\gamma\rho, \qquad 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3\frac{ka^2}{R^2} = 8\pi\gamma\rho, \tag{15}$$

где γ — постоянная тяготения, а ka^2 — произвольная постоянная интеграции, причем $a^2 > 0$, $k = 0, \pm 1$. Должным заданием начального значения R всегда можно выбрать координаты так, чтобы a^2 получило любое заданное положительное значение.

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга

Поступило
16 VI 1948