Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. В. ЧУЛАНОВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ, СВЯЗАННЫЕ С НОВЫМ МЕТОДОМ SELBERG'а В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 X 1948)

В настоящей работе даются некоторые элементарные верхние оценки, указанные в теоремах 1—4 и полученные по методу Selberg'a.

Обозначения: $\pi(x, k, l)$ — число простых чисел, не превосходящих x и принадлежащих арифметической прогрессии $kn+l$, где $(k, l)=1$; $z_{u_1}, \ldots, u_{m-1}(N)$ — число таких чисел n $(1 \leqslant n \leqslant N)$, что числа $n, n+u_1, \ldots, n+u_{m-1}$ — все простые; $A(N)$ — число представлений четного N суммой двух простых (представления $N=p+q$ и $N=q+p$ считаются различными, если $p \neq q$); (z) — множество чисел, для которых произведение всех различных простых делителей не превосходит z; $\varphi(n)$ — функция Эйлера; $\mu(n)$ — функция Мёбиуса; $\alpha_{p,n}$ — показатель, с которым p входит в n; p, q — простые числа.

Теорема 1. *Пусть δ — фиксированное число $(\delta<1)$ и $k=O(x^\delta)$. Тогда*

$$\pi(x, k, l) \leqslant \frac{2x}{\varphi(k) \ln \frac{x}{k}}\left(1+O\left(\frac{\ln \ln x}{\ln x}\right)\right).$$

Теорема 2. *Пусть u — четное натуральное число, зависящее разве лишь от N. Тогда*

$$Z_u(N) \leqslant 16 \prod_{2<p} \frac{n(p-2)}{(p-1)^2} \cdot \prod_{2<p \mid u} \frac{p-1}{p-2} \times$$
$$\times \frac{N}{\ln^2 N}\left(1+O\left(\frac{\ln \ln N}{\ln N}\right)+O\left(\frac{\ln^2 u}{\ln^2 N(\ln \ln N)^2}\right)\right).$$

Теорема 3. *Пусть $0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ — различные фиксированные неотрицательные числа, не образующие полной системы вычетов ни по какому простому модулю. Тогда*

$$Z_{u_1, \ldots, u_{m-1}}(N) \leqslant \frac{2^m m!\, N}{\ln^m N} \prod_p \frac{1-\frac{\omega(p)}{p}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)^m}(1+o(1)),$$

где $\omega(p)$ — число классов, к которым принадлежат $0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ по модулю p.

Теорема 4. *Пусть N — четное натуральное число. Тогда*

$$A(N) \leqslant 16 \prod_{2<p} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \prod_{2<p\mid N} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{N}{\ln^2 N}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln\ln N}\right)^2\right).$$

Все эти теоремы основаны на оценочной формуле Selberg'a. Atle Selberg в своей работе ([1]) доказал следующую теорему:

Теорема. *Пусть $a_1, \ldots, a_N$ — целые, z — вещественное положительное. Пусть число чисел a_n, делящихся на натуральное число ρ, равно*

$$\frac{\omega(\rho)}{\rho} N + R_\rho,$$

где R_ρ — остаточный член, и для любых взаимно простых m и n $\omega(mn) = \omega(m)\,\omega(n)$. Обозначим через N_z число чисел a_n, не делящихся на простые, не превосходящие z. Тогда

$$N_z \leqslant \frac{N}{\sum\limits_{1 \leqslant \rho \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}} + \sum_{1 \leqslant \nu_1, \nu_2 \leqslant z} |\lambda_{\nu_1}\lambda_{\nu_2}|\, R_{\frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1,\nu_2)}},$$

где

$$\lambda_\nu = \mu(\nu) \prod_{p\mid\nu}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \cdot \frac{\sum\limits_{1 \leqslant \rho \leqslant \frac{z}{\nu},\ (\rho,\nu)=1} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}}{\sum\limits_{1 \leqslant \rho \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}},$$

$$f_1(\rho) = \rho \sum_{d\mid\rho} \frac{\mu(d)}{d\,\omega\left(\frac{\rho}{d}\right)}$$

(*следовательно*, $f_1(\rho) = \frac{\rho}{\omega(\rho)} \prod_{p\mid\rho}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)$, *если* $\mu^2(\rho) = 1$).

Наши обозначения отличаются от обозначений Selberg'a лишь тем, что вместо функции $\omega(\rho)$ у него фигурирует функция $f(\rho) = \frac{\rho}{\omega(\rho)}$. Наши обозначения удобнее при дальнейших рассуждениях.

Понятно, при всяком ρ должно быть $\omega(\rho) < \rho$.

Ход нашего рассуждения будет таков.

Преобразуем сначала сумму $\sum\limits_{1 \leqslant \rho \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)}$. Подставляя в нее выражение для $f_1(\rho)$, сразу получаем:

$$\sum_{1 \leqslant \rho \leqslant z} \frac{\mu^2(\rho)}{f_1(\rho)} = \sum_{1 \leqslant \rho \leqslant z} \mu^2(\rho) \prod_{p\mid\rho}\left(\frac{\omega(p)}{p} + \frac{\omega^2(p)}{p} + \ldots\right) = \sum_{n \in (z)} \frac{\prod\limits_{p\mid n} \omega^{\alpha_{p,n}}(p)}{[n]}.$$

Теперь сделаем общую оценку остаточного члена формулы Selberg'a, который обозначим через R, предполагая, что всегда справедливы неравенства $|R_\rho| \leqslant \omega(\rho)$ и $\omega\left(\frac{\nu_1\nu_2}{(\nu_1,\nu_2)}\right) \leqslant \omega(\nu_1)\,\omega(\nu_2)$. Находим:

$$R \leqslant \Big(\sum_{1 \leqslant \nu \leqslant z} |\lambda_\nu|\,\omega(\nu)\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{1 \leqslant \nu \leqslant z} \nu\mu^2(\nu) \prod_{p\mid\nu} \frac{\omega(p)}{p - \omega(p)}\Big)^2 \leqslant z \prod_{p<z} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^2}.$$

Дальнейшие рассуждения проводим для каждой теоремы в отдельности.

Доказывая теорему 1, полагаем $a_n = k(n-1) + l$, $0 < l \leqslant k$, $1 \leqslant n \leqslant N = \left[\frac{x-l}{k}\right] + 1$. Здесь получается

$$\omega(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \nmid k, \\ 0, & \text{если } p \mid k. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{n \in (z)} \frac{\prod\limits_{p \mid n} \omega^{\alpha_{p,n}}(p)}{n} = \sum_{\substack{n \in (z) \\ (n,k)=1}} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{d \mid k} \mu(d) \sum_{\substack{d \mid n \\ 1 \leqslant n \leqslant z}} \frac{1}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varphi(k)}{k} \ln z \left(1 + O\left(\frac{k^{1+\varepsilon}}{\varphi(k) z \ln z}\right)\right).$$

Так как, кроме того, сразу видно, что

$$R = O(z^2 \ln^2 z),$$

то, полагая $z = \frac{\sqrt{N}}{\ln^2 N}$ и замечая, что $\pi(x, k, l) \leqslant N_z + O\left(\frac{\sqrt{x}}{k} + 1\right)$, получаем теорему.

Условие $k = O(x^\delta)$ можно заменить немного более слабым условием.

При доказательстве теоремы 2 полагаем $a_n = n(n+u)$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$. Здесь

$$\omega(p) = \begin{cases} 2, & \text{если } p \nmid u, \\ 1, & \text{если } p \mid u. \end{cases}$$

Оценка снизу суммы $\sum\limits_{n \in (z)} \frac{\prod\limits_{p \mid n} \omega^{\alpha_{p,n}}(p)}{n}$ производится здесь значительно сложнее, чем в случае теоремы 1. Наиболее важным этапом рассуждения является надлежащий выбор числа ξ и замена в этой сумме для всех простых p, бо́льших, чем ξ, и не делящих u, множителя $\omega^{\alpha_{p,n}}(p)$ (т. е. $2^{\alpha_{p,n}}$) на $1 + \alpha_{p,n}$, что мы имеем право сделать, ибо при любом целом неотрицательном α имеет место $2^\alpha \geqslant 1 + \alpha$.

Результат таков:

$$\sum_{n \in (z)} \frac{\prod\limits_{p \mid n} \omega^{\alpha_{p,n}}(p)}{n} \geqslant \frac{1}{4} \prod_{2 < p} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \cdot \prod_{2 < p \mid u} \frac{p-2}{p-1} \times$$

$$\times \ln^2 z \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln z}\right) + O\left(\frac{\ln^2 u}{\ln^2 z (\ln \ln z)^2}\right)\right).$$

Что касается остаточного члена формулы Selberg'а, то его оценка и здесь сразу ясна:

$$R = O(z^2 \ln^4 z).$$

Полагая $z = \frac{\sqrt{N}}{\ln^{3,5} N}$, получаем теорему.

Частный случай теоремы 2 указывает Selberg в работе [1]: при достаточно большом N $Z_2(N) \leqslant 10{,}6 \frac{N}{\ln^2 N}$ (10,6 представляет собою округленное значение постоянной $16 \prod_{2 < p} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$).

При доказательстве теоремы 3 полагаем $a_n = n(n+u_1)\ldots(n+u_{m-1})$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$. Здесь функция $\omega(p)$ равна числу решений сравнения

$$n(n+u_1)\ldots(n+u_{m-1}) \equiv 0 \pmod p.$$

Оценка снизу суммы $\sum_{n \in (z)} \frac{\prod_{p|n} \omega^{\alpha_{p,n}}(p)}{n}$ производится аналогично тому, как в предыдущем случае. Делается замена $\omega^{\alpha_{p,n}}$ на $1 + \alpha_{p,n} + \ldots + \alpha_{p,n}^{m-1}$. (Для достаточно больших p имеем $\omega(p) = m$, а для любого целого неотрицательного α имеет место неравенство $m^\alpha \geqslant 1 + \alpha + \ldots + \alpha^{m-1}$.) Доказательство упрощается более слабой, по сравнению с теоремой 2, формулировкой теоремы 3. Но теорему 3 можно доказать и в столь же сильной форме, как теорему 2, ценой значительных усложнений в рассуждении.

Наконец, при доказательстве теоремы 4 полагаем $a_n = n(N-n)$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$. Но так как в дальнейших рассуждениях роль играет только функция $\omega(\rho)$, которая для $a_n = n(N-n)$ такова же, как и для $a_n = n(N+n)$, а вид чисел a_n роли не играет, то можно сослаться на частный случай теоремы 2, когда $u = N$, и теорема 4 доказана.

Заметим, что хотя мы лишь оценивали сумму $\sum_{n \in (z)} \frac{\prod_{p|n} \omega^{\alpha_{p,n}}(p)}{n}$ снизу, но в действительности она асимптотически равна этим нижним оценкам, что доказывается сложнее. Поэтому улучшить их нельзя.

Можно было бы улучшить результаты, увеличивая z, но тогда становится негодной элементарная оценка остаточного члена формулы Selberg'а.

Поступило
11 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Selberg, Det Kongelige Norske Videnskabersselskabs Forhadlinger, 19 (1946).