Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. А. САПОГОВ

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 X 1948)

1. Закон повторного логарифма для зависимых случайных величин, которому посвящена настоящая заметка, доказывается мною, в основных чертах, путем надлежащего видоизменения известного доказательства, данного А. Н. Колмогоровым для того же закона в случае независимых величин ([1]). Я использую, кроме того, результаты моей предшествующей заметки ([2]).

Через $M(z)$ будем обозначать математическое ожидание величины z a priori; $\underset{(x_k,\, k<i)}{M'}(z)$ — условное математическое ожидание величины z при предположении, что величины x_k с индексами $k<i$ приняли определенные значения.

$\sup\limits_{(x_k,\, k<i)} M'(z)$ и $\inf\limits_{(x_k,\, k<i)} M'(z)$ обозначают, соответственно, точную верхнюю и точную нижнюю границы $\underset{(x_k,\, k<i)}{M'}(z)$ относительно различных возможных значений, принимаемых величинами x_k при $k<i$. Разность $\sup M'(z)$ и $\inf M'(z)$ будем называть изменением математического ожидания величины z и обозначать через изм $M'(z)$. Наконец, как обычно, $P\{\ldots\}$ есть вероятность события, указанного в скобках.

2. Справедлива следующая теорема, распространяющая закон повторного логарифма на случай зависимых случайных величин. (С. Н. Бернштейн доказал, что при тех же условиях суммы рассматриваемых случайных величин в пределе подчиняются закону Гаусса; см. ([3]), § 10).

Теорема. *Пусть* $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ $(M(x_i)=0)$ *есть сумма зависимых величин, удовлетворяющих условиям:*

1) $B_n = M(s_n^2) > Hn^{\lambda}$, *где постоянная* $\lambda > {}^2/_3$;

2) $\sup\limits_{(x_k,\, k<i)} M' \mid x_i^3 \mid < L$;

3) *выполняется одно из неравенств:* $\sup\limits_{(x_k,\, k\leqslant i)} M'(x_{i+1} + \ldots + x_{i+g})^2 < Ng^{\lambda}$ *или* $\sup\limits_{(x_k,\, k\leqslant i)} M'(x_{i+1} + \ldots + x_{i+g})^2 < Ngn^{\lambda-1}$, *каково бы ни было целое* $g>0$;

4) $\underset{(x_k,\ i-k>n^\rho)}{\text{изм}\, M'}(x_i) \leqslant \frac{1}{n^\mu}$, *где* $\rho < \lambda/2$ *есть положительное фиксированное число и постоянная* $\mu > 1 - \frac{\lambda}{2}$; $\underset{(x_k,\ i-k>n^\rho;\ j-k>n^\rho)}{\text{изм}\, M'}(x_i x_j) \leqslant \frac{1}{n^{2-\lambda}}$.

При этих условиях:

А. *Каковы бы ни были данные числа* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, *существует такое число* n_0, *что для всех целых* $p > 0$ *справедливо неравенство*

$$P\{X_{n_0,\ p} > 0\} < \varepsilon,$$

где

$$X_{n_0,\ p} = \max_{n_0 \leqslant n \leqslant n_0 + p} \left[\, | s_n | - (1+\delta)\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}\right].$$

В. *Каковы бы ни были данные числа* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *и* $m > 0$, *существует положительное* p *такое, что справедливо неравенство*

$$P\{Y_{m,\ p} > 0\} > 1 - \varepsilon,$$

где

$$Y_{m,p} = \max_{m \leqslant n \leqslant m+p} \left[\, | s_n | - (1-\delta)\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}\right]$$

(H, N, L — *постоянные*).

Доказательство теоремы основывается на неравенствах (7) из ([2]) и следующих двух леммах, из которых первая является модификацией леммы V из ([1]).

Лемма 1. *Пусть зависимые случайные величины* x_l *удовлетворяют условию*

$$\sup_{(xk,\ k\leqslant i)} M' \left(\sum_{l=i+1}^{n} x_l\right)^2 < KB_n,$$

где $B_n = M(s_n^2)$ *и* K — *постоянная* ($M(x_i) = 0$); *пусть* $\bar{s}_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{s_i\}$.

Тогда

$$P\{s_n > x - \sqrt{2KB_n}\} > \frac{1}{2} P\{\bar{s}_n > x\},$$

каково бы ни было x.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы V из ([1]).

Лемма 2. *Если случайные величины* x_i *удовлетворяют всем условиям доказываемой теоремы, то условная вероятность неравенств*

$$z_0 \sqrt{B^*_{n,k}} < s_n - s_k - M'(s_n - s_k) < z_1 \sqrt{B^*_{n,k}}\,,$$

вычисленная в предположении, что k *первых величин* x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ *получили те или иные определенные значения, отличается от вероятности соответствующих априорных неравенств*

$$z_0 \sqrt{B_{n,k}} < s_n - s_k < z_1 \sqrt{B_{n,k}}$$

не более, чем на $(n-k)^{-\tau}$, *где постоянная* $\tau > 0$, *если*

только $(n-k)$ достаточно велико $\left(B_{n,k}=M\left(\sum_{i=k+1}^{n} x_i\right)^2; \quad B^*_{n,k}=\right.$
$\left.=\underset{(x_i,\, i<k)}{M'}\left(\sum_{i=k+1}^{n} x_i\right)^2\right).$

Справедливость этой леммы вытекает из неравенств

$$|\underset{(x_i,\, i<k)}{M'}(s_n-s_k)|<(n-k)^{-\tau'}, \qquad \left|\frac{B^*_{n,k}}{B_{n,k}}-1\right|<(n-k)^{-\tau''},$$

выполняющихся для достаточно больших $(n-k)$. Здесь τ' и τ'' — некоторые положительные постоянные.

3. Ограничимся доказательством только первой части теоремы, т. е. доказательством утверждения А.

По данному значению $\delta>0$ определим последовательность n_k из условий

$$B'_{n_k-1}\leqslant\left(1+\frac{\delta}{27}\right)^k<B'_{n_k}, \tag{*}$$

где

$$B'_m=\sum_{i=1}^{m} M(x_i^2), \quad B'_0=0.$$

Полагая

$$\sigma_k=\max_{(n_{k-1}+1\leqslant n\leqslant n_k)} s_n,$$

очевидно, будем иметь при любом $p>0$

$$P\{X^{(+)}_{n_k,p}>0\}\leqslant\sum_{j=k+1}^{\infty}P\left\{\sigma_j>(1+\delta)\sqrt{2B'_{n_{j-1}}\ln\ln B'_{n_{j-1}}}\right\},$$

где

$$X^{(+)}_{n_k,p}=\max_{n_k\leqslant n\leqslant n_k+p}\left[s_n-(1+\delta)\sqrt{2B'_n\ln\ln B'_n}\right].$$

Если j достаточно велико, то, в силу (*),

$$(1+\delta)\sqrt{2B'_{n_{j-1}}\ln\ln B'_{n_{j-1}}}>\frac{1+\delta}{\sqrt{1+2\delta/27}}\sqrt{2B'_{n_j}\ln\ln B'_{n_j}},$$

поэтому

$$P\{X^{(+)}_{n_k,p}>0\}\leqslant\sum_{j=k+1}P\left\{\sigma_j>\frac{1+\delta}{\sqrt{1+2\delta/27}}\sqrt{2B'_n\ln\ln B'_{n_j}}\leqslant\right.$$

$$\leqslant\sum_{j=k+1}^{\infty}P\left\{\bar{s}_{n_j}>\frac{1+\delta}{\sqrt{1+2\delta/27}}\sqrt{2B'_{n_j}\ln\ln B'_{n_j}}\right\};$$

последняя сумма, вследствие леммы 1, не превосходит суммы

$$2\sum_{j=k+1}^{\infty}P\left\{s_{n_j}>\frac{1+\delta}{\sqrt{1+2\delta/27}}\sqrt{2B'_{n_j}\ln\ln B'_{n_j}}-\sqrt{\frac{2N}{H}B_{n_j}}\right\},$$

которая, в свою очередь, при достаточно больших k не больше

$$2\sum_{j=k+1}^{\infty} P\left\{s_{n_j} > \frac{1+\delta}{\sqrt{1+\delta/9}}\sqrt{2B'_{n_j}\ln\ln B'_{n_j}}\right\}.$$

Теперь, принимая во внимание правую часть неравенства (7) из [2], убеждаемся в том, что

$$P\{X^{(+)}_{n_k,p} > 0\} \leqslant 2\sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\delta/9}}{(1+\delta)\left(\ln B'_{n_j}\right)^{\frac{(1+\delta)^2(1-\delta/2)}{1+\delta/9}}} <$$

$$< \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{C}{j^{1+\delta/8}} \to 0, \qquad k\to\infty$$

(C — постоянная).

Такое же рассуждение показывает, что и $P\{X^{(-)}_{n_k,p} > 0\} \to 0$ при $k \to \infty$, где

$$X^{(-)}_{n_k,p} = \max_{n_k \leqslant n \leqslant n_k+p}\left[-s_n(1+\delta)\sqrt{2B'_n\ln\ln B'_n}\right].$$

Приняв во внимание, что $B'_n \sim B_n$ $(n\to\infty)$, убеждаемся, наконец, в справедливости утверждения А.

При доказательстве утверждения В будет играть роль лемма 2.

Теорема n°2 дает возможность, в частности, исследовать вопрос о применимости закона повторного логарифма к суммам величин, связанным в цепь Маркова.

Поступило
19 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kolmogoroff, Math. Ann., **101** (1929). [2] Н. А. Сапогов, ДАН, **63**, № 4 (1948). [3] С. Н. Бернштейн, Усп. матем. наук, **10** (1944).