Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. М. ДУБРОВСКИЙ

О СВОЙСТВАХ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ И РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 X 1948)

Пусть $\mathfrak{A}$ — абстрактное множество и $\mathfrak{M}$ — семейство его подмножеств, определяемое условиями: $\mathfrak{M}$ содержит какие угодно разности и конечные или счетные суммы входящих в него множеств, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество.

Во всем последующем мы будем рассматривать семейства вполне аддитивных функций множества, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, зависящие от параметра. При этом множество всех возможных значений параметра может иметь любую мощность; значения функций суть вещественные числа.

Интегралы, рассматриваемые в последующем, понимаются в смысле Лебега — Стильтьеса и обозначаются символом

$$\int\limits_{\mathfrak{B}} f(x)\mu(d\mathfrak{A}_x),$$

где $f(x)$ означает функцию элемента $x\subset\mathfrak{A}$, измеримую относительно семейства $\mathfrak{M}$ и суммируемую относительно вполне аддитивной функции $\mu(e)$, определенной и конечной на семействе $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{B}$ — область интегрирования ($\mathfrak{B}\subset\mathfrak{M}$)

Определения. I. Вполне аддитивные функции множества $\Phi_\alpha(e)$ равномерно аддитивны, если $\Phi_\alpha(e_{n+1}+e_{n+2}+\cdots)\to 0$ равномерно относительно параметра α при $n\to\infty$ для любой суммы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e_k$ взаимно не налегающих множеств из семейства $\mathfrak{M}$.

II. Вполне аддитивная неотрицательная функция множества $M(e)$, определенная и конечная на семействе $\mathfrak{M}$, называется базисом семейства вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha(e)$, если условия $e\subset\mathfrak{M}$, $M(e)=0$ влекут равенство $\Phi_\alpha(e)=0$ для любого значения параметра α.

Если, сверх того, $M(e)=0$ для любого множества $e\subset\mathfrak{M}$, для которого обращаются в нуль полные вариации всех функций $\Phi_\alpha(e)$, то такого рода базис мы будем называть регулярным базисом семейства функций $\Phi_\alpha(e)$.

III. Пусть даны семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha(e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, и семейство $\mathfrak{P}$ базисов $M_\beta(e)$ семейства $\mathfrak{N}$, где α и β — параметры.

а) Пусть при определенных α и β выполнено следующее условие: любому положительному числу ε соответствует такое положительное δ, что $|\Phi_\alpha(e)| < \varepsilon$ для любого $e \subset \mathfrak{M}$, для которого $M_\beta(e) < \delta$. Будем говорить в этом случае, что функция $\Phi_\alpha(e)$ абсолютно непрерывна относительно базиса $M_\beta(e)$.

b) Пусть при определенном α любому положительному ε соответствует такое положительное δ, не зависящее от β, что условие $e \subset \mathfrak{M}$, $M_\beta(e) < \delta$ влечет неравенство $|\Phi_\alpha(e)| < \varepsilon$, каково бы ни было β. Будем говорить в этом случае, что функция $\Phi_\alpha(e)$ абсолютно непрерывна равномерно относительно семейства базисов $\mathfrak{P}$.

c) Пусть при определенном β любому положительному ε соответствует такое положительное число δ, не зависящее от α, что $|\Phi_\alpha(e)| < \varepsilon$ для любого α и для любого множества $e \subset \mathfrak{M}$, для которого $M_\beta(e) < \delta$. Условимся говорить тогда, что функции $\Phi_\alpha(e)$ равностепенно непрерывны относительно базиса $M_\beta(e)$.

d) Пусть сколь угодно малому положительному числу ε соответствует такое положительное δ, не зависящее ни от α, ни от β, что условие $e \subset \mathfrak{M}$, $M_\beta(e) < \delta$ влечет неравенство $|\Phi_\alpha(e)| < \varepsilon$, каковы бы ни были α и β. Условимся говорить в этом случае, что функции семейства $\mathfrak{N}$ равностепенно непрерывны равномерно относительно семейства базисов $\mathfrak{P}$.

Содержание настоящей работы состоит, прежде всего, в теореме 1, устанавливающей инвариантность свойства равностепенной непрерывности семейства вполне аддитивных функций множества относительно базиса. Эта теорема была доказана мною ранее ([1]), причем прежнее доказательство имеет преимущество перед доказательством, приводимым в настоящей работе, в том отношении, что не прибегает к помощи трансфинитной индукции и выясняет внутреннее характерное свойство семейства вполне аддитивных функций множества, при котором это семейство является равностепенно непрерывным относительно любого базиса. Это свойство есть свойство равномерной аддитивности. Однако доказательство инвариантности свойства равностепенной непрерывности по отношению к базису, рассматриваемое в настоящей работе, имеет преимущество перед прежним доказательством в том, что носит более простой и непосредственный характер.

Остальные теоремы дают новые результаты. Они посвящены углубленному исследованию свойства равностепенной непрерывности и свойства абсолютной непрерывности.

Теорема 1. *Пусть дано семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi_\alpha(e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, где α — параметр. Пусть функции $\Phi_\alpha(e)$ равностепенно непрерывны относительно базиса $M(e)$. Тогда, каков бы ни был другой базис $M^*(e)$ семейства $\mathfrak{N}$, функции $\Phi_\alpha(e)$ будут равностепенно непрерывны также относительно базиса $M^*(e)$.*

Доказательство. Условимся говорить, что множество e обладает свойством (A), если $e \subset \mathfrak{M}$, $M^*(e) = 0$, $M(e) \neq 0$. Расположим всевозможные множества, обладающие свойством (A), в какую-либо вполне упорядоченную последовательность, после чего, переходя от каждого множества к следующему, последовательно удалим из этой последовательности все множества, имеющие общие элементы с предыдущими множествами, не подвергшимися удалению. Оставшаяся последовательность взаимно не налегающих множеств не может быть неисчислимой, так как в противном случае $M(\mathfrak{A})$ было бы бесконечно. Обозначим через $\mathfrak{E}$ сумму множеств этой оставшейся последовательности. Так как она счетна, то $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{M}$, $M^*(\mathfrak{E}) = 0$. Пусть теперь e — любое множество семейства $\mathfrak{M}$, содержащееся в $\mathfrak{A} - \mathfrak{E}$, для которого $M^*(e) = 0$. Тогда также $M(e) = 0$. Действительно, в противном случае множество e обладало бы свойством (A) и вошло бы в рассмотренную вполне упорядоченную последовательность множеств.

Предположим, что множество e удалено при произведенном процессе удаления множеств. Это значит, что оно имеет общие элементы с $\mathfrak{E}$, что невозможно, так как $e \subset \mathfrak{A} - \mathfrak{E}$. Допуская, наоборот, что множество e не подверглось удалению, мы, тем более, приходим к противоречию, так как тогда $e \subset \mathfrak{E}$.

Таким образом, действительно, условия $e \subset \mathfrak{M}$, $e \subset \mathfrak{A} - \mathfrak{E}$, $M^*(e)=0$ влекут равенство $M(e)=0$, откуда, в силу известной теоремы Nikodym'а ([2]), существует функция $f(x)$ элемента $x \subset \mathfrak{A} - \mathfrak{E}$, суммируемая относительно $M^*(e)$ на множестве $\mathfrak{A} - \mathfrak{E}$, такая, что имеет место равенство

$$M(e) = \int_e f(x)\, M^*(d\mathfrak{A}_x)$$

при условии $e \subset \mathfrak{M}$, $e \subset \mathfrak{A} - \mathfrak{E}$.

Пусть теперь ε — сколь угодно малое положительное число. Ему будет соответствовать положительное число $N = N(\varepsilon)$, для которого будет удовлетворяться неравенство

$$\int_{e(N)} [f(x) - N]\, M^*(d\mathfrak{A}_x) < \varepsilon,$$

где $e(N)$ — совокупность всех элементов $x \subset \mathfrak{A} - \mathfrak{E}$, для которых $f(x) > N$, откуда, как легко видеть, $M(e) < \varepsilon + NM^*(e)$ для любой части e множества $\mathfrak{A} - \mathfrak{E}$, содержащейся в $\mathfrak{M}$, а следовательно, $M(e) < 2\varepsilon$ при дополнительном условии $M^*(e) < \varepsilon / N$. Полученный вывод означает, что базис $M(e)$ абсолютно непрерывен относительно базиса $M^*(e)$ в области $e \subset \mathfrak{M}$, $e \subset \mathfrak{A} - \mathfrak{E}$. Возьмем теперь любое положительное число η. Согласно предположению, для него существует положительное число $\delta(\eta)$, не зависящее от α, такое, что условие $e \subset \mathfrak{M}$, $M(e) < \delta(\eta)$, влечет неравенство $|\Phi_\alpha(e)| < \eta$ для любого α. Тогда, если

$$e \subset \mathfrak{M}, \qquad M^*(e) < \frac{\frac{1}{2}\delta(\eta)}{N\left[\frac{1}{2}\delta(\eta)\right]},$$

то $|\Phi_\alpha(e)| < \eta$ при всех α. Действительно, для части e, принадлежащей $\mathfrak{A} - \mathfrak{E}$, этот вывод вытекает непосредственно из предыдущего, но он верен и вообще, так как $M^*(e\mathfrak{E})=0$, а следовательно, также $\Phi_\alpha(e\mathfrak{E})=0$ при всех α. Рассматриваемая теорема, таким образом, доказана.

Теорема 2. *Пусть дано семейство $\mathfrak{P}$ неотрицательных вполне аддитивных функций множества $M_\beta(e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, где β — параметр. Предположим, что если одна из функций $M_\beta(e)$ равна нулю для некоторого множества $e \subset \mathfrak{M}$, то для этого множества равны нулю также все остальные функции $M_\beta(e)$.*

Тогда, если одна из функций семейства $\mathfrak{P}$ абсолютно непрерывна равномерно относительно всех остальных, то любая другая из функций семейства $\mathfrak{P}$ обладает таким же свойством.

Теорема 3. *Пусть дано семейство $\mathfrak{P}$ неотрицательных вполне аддитивных функций множества $M_\beta(e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, зависящее от параметра β.*

Пусть равенство $M_\beta(e)=0$ (где $e \subset \mathfrak{M}$) при одном произвольном значении β влечет за собой такое же равенство при всех остальных значениях β. Согласно теореме Nikodym'а ([2]), для любых функций M_β и M_{β_1} семейства $\mathfrak{P}$ имеет место равенство

$$M_{\beta_1}(e)=\int\limits_e f(\beta_1, \beta, x)\, M_\beta(d\mathfrak{A}_x)$$

($e \subset \mathfrak{M}$) *и, в частности,*

$$M_{\beta_1}(\mathfrak{A})=\int\limits_{\mathfrak{A}} f(\beta_1, \beta, x)\, M_\beta(d\mathfrak{A}_x),$$

где $f(\beta_1, \beta, x)$ — *функция элемента* $x \subset \mathfrak{A}$, *суммируемая относительно* $M_\beta(e)$ *на множестве* $\mathfrak{A}$.

Если при каком-то определенном β_1 *последний интеграл сходится равномерно относительно* β, *то он сходится равномерно относительно* β *и при любом другом определенном значении параметра* β_1. *Равномерная сходимость относительно* β *этого интеграла (при определенном* β_1*) является необходимым и достаточным условием того, чтобы любая из функций семейства* $\mathfrak{P}$ *была абсолютно непрерывна равномерно относительно всех остальных.*

При этом равномерная сходимость рассматриваемого интеграла понимается в следующем смысле: сколь бы мало ни было положительное число ε, *ему соответствует такое положительное* $N=N(\varepsilon)$, *не зависящее от* β, *что для всех* β *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{e(N,\, \beta_1,\, \beta)} [f(\beta_1, \beta, x)-N]\, M_\beta(d\mathfrak{A}_x)<\varepsilon,$$

где $e(N, \beta_1, \beta)$ *означает совокупность всех элементов* $x \subset \mathfrak{A}$, *для которых первый множитель под знаком последнего интеграла положителен.*

Теорема 4. *Пусть дано семейство* $\mathfrak{N}$ *вполне аддитивных функций множества* $\Phi_\alpha(e)$, *определенных и конечных на семействе множеств* $\mathfrak{M}$, *обладающее свойством равностепенной непрерывности, где* α — *параметр. Рассмотрим некоторое семейство* $\mathfrak{P}$ *регулярных базисов* $M_\beta(e)$ *семейства* $\mathfrak{N}$, *зависящее от параметра* β. *Для того чтобы функции* $\Phi_\alpha(e)$ *были равностепенно непрерывны равномерно относительно семейства* $\mathfrak{P}$, *необходимо и достаточно, чтобы каждый из базисов* $M_\beta(e)$ *был абсолютно непрерывен равномерно относительно остальных. Это необходимое и достаточное условие эквивалентно условию равномерной сходимости относительно* β *интеграла*

$$M_{\beta_1}(e)=\int\limits_e f(\beta_1, \beta, x)\, M_\beta(d\mathfrak{A}_x)$$

при каждом определенном значении β_1 *и при каждом* $e \subset \mathfrak{M}$ *(в смысле, указанном в теореме 3).*

Теорема 2 легко доказывается, аналогично теореме 1. Второе утверждение теоремы 3 можно без большого труда доказать методом от противного, после чего первое утверждение становится следствием теоремы 2. Теорема 4 легко доказывается на основании остальных, причем нужно принять во внимание конструкцию регулярного базиса, который строится в ([3]).

Поступило
20 IX 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Дубровский, Матем. сб., **20** (62), № 2, 317 (1947). [2] O. Nikodym, Fund. Math., **15**, 131 (1930). [3] В. М. Дубровский, ДАН, **58**, № 5, 737 (1947).