Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК ВАН-ДЕР-КОРПУТА, ВИССЕРА, ФЕЙЕСА И БОАСА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 X 1948)

Обозначим через $G_n(\theta)$ вещественный тригонометрический полином порядка не выше n

$$G_n(\theta) = \Re \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_k e^{ik\theta}, \qquad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \tag{1}$$

и пусть

$$I_n = \int_0^{2\pi} | G_n(\theta) | \, d\theta. \tag{2}$$

За последние годы появилось несколько работ (см. ([1–4])), ставящих себе целью найти оценку

$$\max \frac{\lambda_0 |\gamma_0| + \lambda_k |\gamma_k|}{I_n}, \qquad 0 < k \leqslant n, \tag{3}$$

где λ_0, λ_k — заданные неотрицательные числа.

Хотя некоторые из этих оценок выведены весьма простыми и изящными методами, однако в общем случае любого k $(0 < k \leqslant n)$ они не являются точными.

Точные оценки для (3) вытекают как весьма частные случаи из общей теоремы, установленной нами в 1934 г. ([5]), в которой мы связываем рассматриваемую задачу с замечательными исследованиями Н. Ахиезера и М. Крейна ([8]) о функциях, наименее уклоняющихся от нуля; нам кажется не лишним привести этот общий результат и получить из него, как частный случай, точную оценку для (3).

Теорема ([5]). *Задача о нахождении*

$$\max \frac{\left| \Re \sum_{s=0}^{n} \gamma_s c_s \right|}{I_n}, \tag{4}$$

где $\{c_s\}_0^n$ — заданные комплексные числа, эквивалентна задаче Н. Ахиезера и М. Крейна ([8]) о нахождении суммируемой функции

$F^*(\theta)$, наименее уклоняющейся от нуля на отрезке $[0, 2\pi]$ из всех функций, ряды Фурье которых начинаются следующим образом:

$$F(\theta) \sim \frac{c_0}{2} + \Re \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ik\theta} + \cdots ; \tag{5}$$

экстремальная функция $F^*(\theta)$ связана с экстремальным тригонометрическим полиномом $G_n^*(\theta)$, для которого достигается максимум (4), соотношением (почти всюду в $[0, 2\pi]$)

$$F^*(\theta) = L \operatorname{sgn} G_n^*(\theta); \tag{6}$$

искомый максимум равен L/π, где L — наибольший положительный корень уравнения

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \mu_{-r} = \bar{\mu}_r \quad (r = 0, 1, \ldots n); \tag{7}$$

*числа $\{\mu_r\}_0^n$ являются коэффициентами разложения**

$$\exp\left\{\frac{\pi i}{2L}\left[\frac{c_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu z^\nu\right]\right\} \mu + \mu_1 z + \cdots + \mu_n z^n + \cdots, \quad \mu_0 = \mu + \bar{\mu}. \tag{8}$$

В том частном случае, о котором идет речь в (3), мы имеем

$$\exp\left\{\frac{\pi i c_0}{4L} + \frac{\pi i c_k}{2L} z^k\right\} = \mu + \mu_1 z + \cdots + \mu_n z^n + \cdots, \tag{9}$$

откуда

$$\mu_0 = 2\cos\frac{\pi c_0}{4L}; \qquad \mu_{sk} = \frac{1}{s!}\left(\frac{\pi i c_k}{2L}\right)^s \exp\left(\frac{\pi i c_0}{4L}\right) \quad (s = 1, 2, \ldots); \tag{10}$$

$$\mu_\nu = 0, \qquad \nu \neq sk.$$

Пусть сперва $c_0 \neq 0$; вводя обозначения

$$\frac{\pi c_0}{4L} = \nu, \qquad \frac{c_k}{c_0} = \lambda e^{i\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \quad p = \left[\frac{n}{k}\right], \tag{11}$$

мы получим, после элементарных упрощений, точную оценку

$$|\Re(\gamma_0 + \lambda e^{i\alpha}\gamma_k)| \leqslant \frac{1}{4\nu} I_n, \tag{12}$$

* См. ([8]); там же указано построение экстремальной функции $F^*(\theta)$, откуда вытекает построение экстремального полинома $G_n^*(\theta)$; в нашей работе ([6]) указана еще одна форма для $G_n^*(\theta)$.

где ν — наименьший положительный корень уравнения

$$\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \ldots & m_p \\ m_{-1} & m_0 & \ldots & m_{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{-p} & m_{-p+1} & \ldots & m_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

причем

$$m_0 = 2\cos\nu; \qquad m_s = \frac{(2\nu\lambda)^s}{s!} e^{i\nu}, \quad m_{-s} = \overline{m}_s \quad (s = 1, 2, \ldots, p). \tag{14}$$

Так как неравенство (12) справедливо при любом α, то отсюда вытекает точная оценка для модулей коэффициентов

$$|\gamma_0| + \lambda |\gamma_k| \leqslant \frac{1}{4\nu} I_n, \tag{15}$$

где λ — произвольное положительное число.

В том частном случае, когда $k > n/2$, имеем $p = 1$, и $\nu = \nu_0$ определяется из уравнения

$$\cos\nu_0 = \lambda\nu_0. \tag{16}$$

Ван-дер-Корпут и Виссер [2] дали оценку, обобщенную и улучшенную Боасом [4]; однако эта оценка Боаса

$$|\gamma_0| + |\gamma_k| \frac{\lambda}{2} \sec\frac{\pi}{p+2} \leqslant \frac{1}{4\nu_0} I_n, \quad p = \left[\frac{n}{k}\right] \geqslant 1, \tag{17}$$

является точной лишь при $p = 1$. Например, при $p = 2$, $\lambda = 1$ мы получим по Боасу

$$|\gamma_0| + |\gamma_k| \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{1}{4\nu_0} I_n = 0{,}338\, I_n; \tag{18}$$

точное значение ν получим, решая уравнение

$$\sin\nu = 1 - \frac{\nu^2}{2}, \tag{19}$$

вытекающее из (13); следовательно, точная оценка такова:

$$|\gamma_0| + |\gamma_k| \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant 0{,}32 I_n \quad (\nu = 0{,}78). \tag{20}$$

Пусть теперь $c_0 = 0$; полагая $|c_k| = 1$, мы имеем в этом случае из нашей теоремы точную оценку

$$|\gamma_k| \leqslant \frac{1}{4\nu} I_n, \tag{21}$$

где ν — снова наименьший положительный корень алгебраического уравнения (13), где в данном случае надо положить

$$m_0 = 2, \qquad m_s = m_{-s} = \frac{(2\nu)^s}{s!} \quad (s = 1, 2, \ldots, p). \tag{22}$$

В том частном случае, когда $k > n/3$, т. е. $p \leqslant 2$, имеем $\nu = 1$ и, следовательно,

$$|\gamma_k| \leqslant \frac{1}{4} I_n, \qquad k > \frac{n}{3}; \tag{23}$$

эта оценка, найденная Фейесом [1], содержится, как частный случай, в результатах нашей работы [6]; более общая оценка Боаса [4], справедливая при любом k,

$$|\gamma_k| \leqslant \frac{1}{2} I_n \cos\frac{\pi}{p_1+2}, \quad p_1 = 2\left[\frac{n-k}{2k}\right] + 1, \tag{24}$$

является точной лишь в случае $k > n/3$. Например, при $p_1 = 3$ получим по Боасу

$$|\gamma_k| \leqslant \frac{1}{2} \cos\frac{\pi}{5} I_n = 0{,}404\, I_n; \tag{25}$$

точную оценку получим по (21), находя ν из уравнения

$$(1-\nu^2)^2 - \frac{\nu^6}{9} = 0, \tag{26}$$

вытекающего из (13); точная оценка такова:

$$|\gamma_k| \leqslant 0{,}284\, I_n \quad (\nu = 0{,}88). \tag{27}$$

Оценка (23) для случая $k > n/2$ вытекает также из следующих соображений: нами было показано (см. [5-7]), что, если в (4) $\{c_s\}_0^{k-1} = 0$, $k > \left[\frac{n}{2}\right]$, то для неотрицательного тригонометрического полинома максимум выражения (4) получается умножением на $2/\pi$ максимума того же выражения для полинома, не связанного условием неотрицательности; но для неотрицательного тригонометрического полинома Эгервари и Сас [9] нашли оценку, из которой при $k \geqslant n/2$ имеем

$$|\gamma_k| \leqslant \frac{1}{2\pi} I_n; \tag{28}$$

деля правую часть на $2/\pi$, получим (23).

Заметим, в заключение, что метод, примененный Боасом в последней из его работ [4], аналогичен (для рассматриваемого им частного случая) методу, примененному нами в [5]; однако, в отличие от нас, он не пользуется результатами Н. Ахиезера и М. Крейна [8] о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, — а без этого, как это явствует из нашей теоремы, невозможно получить точные оценки.

Поступило
19 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Fejes, J. Lond. Math. Soc., 14, 44 (1939). [2] J. G. Van der Corput and C. Visser, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., 49, 383 (1946). [3] C. Visser, ibid., 46, 276 (1945). [4] R. P. Boas Jr., ibid., 50, 298 (1947); 50, 492 (1947); 50, 759 (1947). [5] Я. Л. Геронимус, C. R., 198, 2221 (1934); 199, 1010 (1934). [6] Я. Л. Геронимус, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 2, 185 (1937); № 4, 445 (1938). [7] Я. Л. Геронимус, Bull. Am. Math. Soc., 42, 129 (1936). [8] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, Сообщ. Харьковск. математ. об-ва, сер. 4, 9, 9 (1934). [9] E. v. Egerváry u. O. Szász, Math. Z., 27, 641 (1927).