Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

К. П. СТАНЮКОВИЧ

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 10 XI 1948)

Уравнения неустановившихся осесимметричных течений газа имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{v^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0,\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{uv}{r}+\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=0,\\
\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{\rho}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{\rho u}{r}+\frac{\rho(u+v\operatorname{ctg}\theta)}{r}=0,\\
\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial s}{\partial\theta}=0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь r — радиус-вектор; θ — угол между какой-либо осью (совпадающей с невозмущенным движением газа) и радиусом-вектором; u — проекция скорости на r; v — проекция скорости на перпендикуляр к r; ρ — плотность; p — давление; $s=p\rho^{-k}$ — величина, характеризующая энтропию газа. Член $u+v\operatorname{ctg}\theta$ характеризует осесимметричность потока, в случае плоского потока этот член исчезает. Введем величину $w=p/\rho$, тогда система (1) примет вид:

$$\begin{gathered}
\dot{u}_t+uu'_r+\frac{v}{r}u'_\theta-\frac{v^2}{r}+w'_r+w\frac{\rho'_r}{\rho}=0,\\
\dot{v}_t+uv'_r+\frac{v}{r}v'_\theta+\frac{uv}{r}+\frac{w'_\theta}{r}+\frac{w}{r}\frac{\rho'_\theta}{\rho}=0,\\
\frac{\dot{\rho}_t}{\rho}+u\frac{\rho'_r}{\rho}+\frac{v}{r}\frac{\rho'_\theta}{\rho}+u'_r+\frac{u}{r}+\frac{v_\theta'}{r}+\frac{u+v\operatorname{ctg}\theta}{r}=0,\\
\frac{\dot{w}_t}{w}+u\frac{w'_r}{w}+\frac{v}{r}\frac{w'_\theta}{w}=(k-1)\left[\frac{\dot{\rho}_t}{\rho}+u\frac{\rho'_r}{\rho}+\frac{v}{r}\frac{\rho'_\theta}{\rho}\right].
\end{gathered} \tag{2}$$

Введем:

$$u=\frac{r}{t}x_1,\quad v=\frac{r}{t}x_2,\quad w=\frac{r^2}{t^2}y,\quad \rho=r^a t^b\eta, \tag{3}$$

где x_1, x_2, y, η — функции одной независимой переменной,

$$z=r^\alpha t^\beta e^{\xi\theta} \tag{4}$$

(причем независимых параметров будет четыре: a, b, α/ξ, β/ξ). В результате придем к системе уравнений, описывающей автомодельные неустановившиеся течения газа:

$$\begin{gathered}
-x_1 + x_1'(\beta + \alpha x_1 + \xi x_2) + x_1^2 - x_2^2 + \alpha y' + y\left[a + 2 + \alpha\frac{\eta'}{\eta}\right] = 0,\\
-x_2 + x_2'(\beta + \alpha x_1 + \xi x_2) + 2x_1x_2 + \xi y' + \xi y\frac{\eta'}{\eta} = 0,\\
b + \frac{\eta'}{\eta}(\beta + \alpha x_1 + \xi x_2) + (2 + a)x_1 + \alpha x_1' + \xi x_2' + x_1 + x_2 \operatorname{ctg}\theta = 0,\\
2(x_1 - 1) + \frac{y'}{y}(\beta + \alpha x_1 + \xi x_2) = (k-1) = \left[\frac{\eta'}{\eta}(\beta + \alpha x_1 + \xi x_2) + b + ax_1\right].
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь, например, $x_1' = dx_1/d\ln z$.

В случае $\alpha = \beta = 0$, $z = e^{\xi\theta}$ и система (5) имеет решения в предполагаемом „автомодельном“ виде.

Если $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то искомые решения могут иметь место лишь для плоских движений, когда исчезает член $x_1 + x_2 \operatorname{ctg}\theta$, содержащий в явном виде θ.

Исследуем сначала случай $\alpha = \beta = 0$.

Уравнения (5), исключая η'/η, при этом принимают вид (здесь можно принять $\xi = 1$):

$$\begin{gathered}
-x_1 + x_1^2 - x_2^2 + x_2x_1' + (a+2)y = 0,\\
x_2x_2' - x_2 + 2x_1x_2 + \frac{k}{k-1}y' + y\left[\frac{2(x_1-1)}{(k-1)x_2} - \frac{b + ax_1}{x_2}\right] = 0\\
x_2\frac{y'}{y} + 2(kx_1 - 1) + (k-1)[x_2' + x_1 + x_2\operatorname{ctg}\theta] = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь, например, $x_1' = dx_1/d\theta$.

В случае плоских движений, поскольку z не входит явно в уравнения системы, (5), исключая η'/η, может быть приведено к виду (здесь тоже можно принять, что $\xi = 1$):

$$-\frac{d\ln z}{dx_1} = \frac{\dfrac{\alpha k}{k-1}\dfrac{dy}{dx_1} + \beta + \alpha x_1 + x_2}{x_1^2 - x_2^2 - x_1 + y\left[\dfrac{a + 2 + \dfrac{2}{k-1}(x_1-1) - (b + ax_1)}{\beta + \alpha x_1 + x_2}\right]} =$$

$$= \frac{\dfrac{k}{k-1}\dfrac{dy}{dx_1} + (\beta + \alpha x_1 + x_2)\dfrac{dx_2}{dx_1}}{2x_1x_2 - x_2 + y\left[\dfrac{\dfrac{2}{k-1}(x_1-1) - (b + ax_1)}{\beta + \alpha x_1 + x_2}\right]} =$$

$$= \frac{\dfrac{dy}{dx_1}\dfrac{\beta + \alpha x_1 + x_2}{y} + (k-1)\left[\dfrac{dx_2}{dx_1} - \alpha\right]}{2(kx_1 - 1)}. \tag{7}$$

В случае безвихревых движений $\frac{\partial u}{\partial \theta} = r\frac{\partial v}{\partial r} + v$, что для автомодельных движений может быть записано в виде:

$$\xi \frac{dx_1}{d\ln z} = \alpha \frac{dx_2}{d\ln z} + 2x_2. \tag{8}$$

Это условие несовместно с уравнениями (6), поэтому нет автомодельных нестационарных безвихревых течений, обладающих осевой симметрией. В случае плоских движений условие (8) будет совместно с уравнениями (5) лишь в случае $\xi = 0$, т. е. если $z = (rt^{\beta/\alpha})^{\alpha}$. При этом $v \equiv 0$, и мы придем к известным уравнениям, определяющим движения в плоскости с точечной симметрией ([1, 2]). Иных безвихревых течений нет.

Почти такие же соотношения, как (5), (6), (7), и точно такие же выводы, как полученные только что, мы установим для другого класса автомодельных течений, предполагая, что

$$u' = rx_1, \quad v = rx_2, \quad w = r^2 y, \quad \rho = r^a e^{bt}\eta, \tag{9}$$

где x_1, x_2, y, η — функции переменной $x = r^{\alpha} e^{\beta t} e^{\xi\theta}$ (ξ можно, вообще говоря, положить равной 1).

Необходимо особенно отметить, что в общем случае течений, зависящих от трех пространственных координат и времени, нельзя найти автомодельных решений, зависящих от одной независимой переменной. Можно лишь искать (автомодельные) течения, когда число независимых переменных уменьшается на один или два параметра. Например, написав основные уравнения в сферических координатах и вводя

$$u_r = \frac{r}{t}x_1, \quad u_{\varphi} = \frac{r}{t}x_2, \quad u_{\theta} = \frac{r}{t}x_3, \quad w = \frac{r^2}{t^2}y, \quad \rho = r^a t^b \eta, \tag{10}$$

где x_1, x_2, x_3, y, η — функции только θ и φ, мы придем к уравнениям с двумя независимыми переменными. Если же написать уравнения в прямоугольных координатах l_1, l_2, l_3, то, вводя в качестве независимых переменных параметры $\lambda_i = l_i t^{-a_1}$ ($i = 1, 2, 3$), мы придем к системе уравнений с тремя независимыми параметрами, причем:

$$u_l = t^{a_1 - 1}\bar{u}_i, \quad w = t^{2(a_1 - 1)}\bar{w}, \quad \rho = t^{a_2}\bar{\rho}, \tag{11}$$

где $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$, $\bar{w}$, ρ — функции параметров λ_i.

Аналогично, положив

$$u_l = e^{a_1 t}\bar{u}_i, \quad w = e^{2a_1 t}\bar{w}, \quad \rho = e^{a_2}\bar{\rho}, \tag{12}$$

мы придем к системе уравнений также с тремя независимыми параметрами, причем $\lambda_i = l_i e^{-a_1 t}$. Здесь $\bar{u}_i$, $\bar{w}$, $\bar{\rho}$ — функции параметров λ_i.

Поступило
10 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, ДАН, 47, № 2 (1945). [2] К. П. Станюкович, ДАН, 48, № 5 (1945).