Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ВОКРУГ КРУГЛОГО ДИСКА

(Представлено академиком В. А. Фоком 9 VI 1948)

1. Введем координатную систему, изображенную на рис. 1. Тонкий круглый диск радиуса a расположим в плоскости yz так, чтобы центр диска совпал с началом координат.

Рассмотрим объем V справа от плоскости yz, ограниченный поверхностью S, состоящей из плоскости yz и полусферы большого радиуса.

Точечный источник поля предполагаем расположенным слева от плоскости yz.

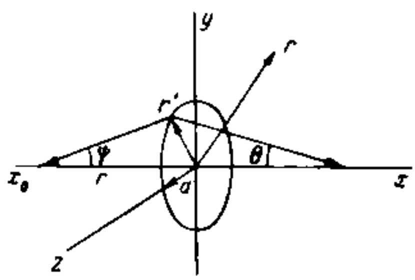

Рис. 1

Применим теорему Грина к функциям

$$\varphi(r) - \varphi_0(r) \text{ и } E(r, r') = \frac{e^{ik|r'-r|}}{|r'-r|}, \tag{1}$$

каждая из которых в объеме V удовлетворяет уравнению:

$$\nabla^2 \varphi(r) + k^2 \varphi(r) = 0; \tag{2}$$

$\varphi_0(r)$ — скалярный потенциал точечного источника в точке r при отсутствии диска.

В результате получим

$$\varphi(r) = \varphi_0(r) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\text{пл. } yz}\!\!\int \left\{ E(r, r') \left[\frac{\partial \varphi(r')}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_0(r')}{\partial n} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial E(r, r')}{\partial n} [\varphi(r') - \varphi_0(r')] \right\} ds. \tag{3}$$

Уравнение (3) является основным интегральным уравнением рассматриваемой задачи. Это же уравнение с измененным знаком интеграла, соответственно противоположному направлению нормали, будет определять скалярный потенциал электрического поля в той части пространства, которая расположена слева от плоскости yz, и, следовательно, может быть применено для определения отраженного от диска поля.

2. Принимая диск идеально проводящим, граничными условиями на поверхности диска считаем $\varphi = 0$ и $\partial\varphi/\partial x = 0$. На остальной части плоскости yz предполагаем существование равенств $\varphi = \varphi_0$ и

$\partial\varphi / \partial x = \partial\varphi_0 / \partial x$. Эти равенства соответствуют предположению, что в остальной части плоскости yz поле осталось неизменным.

В соответствии с этими граничными условиями, из уравнения (3) получаем:

$$\varphi(r) = \varphi_0(r) + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left\{ E(r, r') \frac{\partial\varphi_0(r')}{\partial x} - \varphi_0(r') \frac{\partial E(r, r')}{\partial x} \right\} ds, \tag{4}$$

где S — поверхность диска.

3. Двойной интеграл, входящий в уравнение (4), распространенный на незамкнутую поверхность диска, может быть преобразован в линейный интеграл, взятый по контуру, ограничивающему диск.

Преобразование подобного рода применил Маджи [1]. Пользуясь преобразованием Маджи, в нашем случае получаем:

$$\varphi(r) = \delta\varphi_0(r) + \frac{1}{4\pi} \oint\limits_\Gamma \bar{a}\, ds. \tag{5}$$

Здесь $\delta = 1 - \varepsilon$, причем $\varepsilon = 1$ и $\delta = 0$ в случае, если r лежит в области геометрической тени, и $\varepsilon = 0$ и $\delta = 1$, если r лежит в освещенной части пространства.

Вектор $\bar{a}$ для рассматриваемого нами случая расположения точечного диполя в точке r_0 на оси диска, при котором $\varphi_0(r) = \varphi_0 \frac{e^{ik|r' - r_0|}}{|r' - r_0|}$, будет равен [1]

$$\bar{a} = \varphi_0 \frac{e^{ik(|r' - r_0| + |r' - r|)}}{|r' - r_0|\,|r' - r|} \left\{ \frac{(r' - r_0) \times (r' - r)}{|r' - r_0|\,|r' - r| + (r' - r_0)(r' - r)} \right\}. \tag{6}$$

Записав выражение (6) соответственно принятой нами системе координат и подставив его в уравнение (5), получим:

$$\varphi(x, y, 0) = \delta\varphi_0 \frac{e^{ik[(x + x_0)^2 + y^2]^{1/2}}}{[(x + x_0)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{\varphi_0}{4\pi} \frac{e^{ik(x_0^2 + a^2)^{1/2}}}{(x_0^2 + a^2)^{1/2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{ik(x^2 + y^2 + a^2 - 2ay\cos\varphi)^{1/2}}}{(x^2 + y^2 + a^2 - 2ay\cos\varphi)^{1/2}} \times$$

$$\times \frac{[a(x + x_0) - x_0 y \cos\varphi]\, a\, d\varphi}{\{(x^2 + a^2)^{1/2} (x^2 + y^2 + a^2 - ay\cos\varphi)^{1/2}\, a^2 - x_0 x - ay\cos\varphi\}}. \tag{7}$$

Выражением (7) скалярный потенциал поля сзади диска вполне определяется.

В случае, если скалярный потенциал определяется в точке, лежащей на оси ($y = 0$), выражение (7) принимает вид:

$$\varphi(x, 0, 0) = \varphi_0 \frac{e^{ik\left(x_0^2 + a^2\right)^{1/2}}}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{1/2}} e^{ik(x^2 + a^2)^{1/2}} \frac{\frac{1}{2}\sin\theta\sin(\theta + \psi)}{1 - \cos(\theta + \psi)}. \tag{8}$$

Если расстояние до диска от источника x_0 велико по сравнению с радиусом диска и углом ψ можно пренебречь, выражение (7) еще более упрощается:

$$\varphi(x, 0, 0) = \varphi_0 \frac{e^{ik\left(x_0^2 + a^2\right)^{1/2}}}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{1/2}} e^{ik(x^2 + a^2)^{1/2}} \frac{1 + \cos\theta}{2}. \tag{9}$$

Для точек, лежащих вблизи оси, для которых y мало, выражение (7) принимает вид

$$\varphi(x, y, 0) =$$
$$= \varphi_0(x, y, 0)\left\{1 + \frac{a^2}{2d^2}\frac{e^{ik(d-x)}}{(1 - x/d)}\left[J_0\left(\frac{kay}{d}\right) + i\frac{y}{a}J_1\left(\frac{kay}{a}\right)\right]\right\}, \tag{10}$$

где $x^2 + y^2 + a^2 = d^2$.

Это выражение справедливо для всех значений y, удовлетворяющих неравенству $y \ll \left(\frac{\lambda d}{2}\right)^{1/2}\frac{d}{2}$, при условии что расстояние до источника $x_0 \gg ka^2$, $x_0 \gg x$, $x_0 \gg y$.

4. Найденная выше скалярная функция $\varphi(x, y, z)$ может быть применена для определения компонент вектора электрического и магнитного полей в рассматриваемой области.

Действительно, известно, что поле электрического диполя выражается через вектор Герца, параллельный оси диполя. Следовательно, при расположении диполя вдоль оси диска вектор Герца может быть представлен в виде

$$\overline{\Pi} = \overline{i}_x \varphi(r), \tag{11}$$

где $\overline{i}_x$ — единичный вектор, направленный вдоль оси x.

Вектор напряженности электрического поля будет определяться выражением

$$\overline{E} = \overline{i}_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \overline{i}_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + \overline{i}_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} + \overline{i}_x k^2 \varphi. \tag{12}$$

Нетрудно показать, что на поверхности диска имеют место равенства

$$E_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x} = 0, \quad E_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} = 0 \tag{13}$$

и, таким образом, выполняются известные граничные условия для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на поверхности идеально проводящего проводника.

Если диполь перпендикулярен оси x, то вектор Герца может быть представлен в виде: $\overline{\Pi} = \overline{i}_y \varphi(r)$. Вектор напряженности электрического поля в этом случае равен:

$$\overline{E} = \overline{i}_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x} + \overline{i}_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z} + \overline{i}_y\left(k^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right). \tag{14}$$

Подобным же способом может быть найден вектор напряженности магнитного поля.

5. Проведенные исследования позволяют сделать следующие качественные выводы о структуре дифракционного поля сзади круглого идеально проводящего диска.

За диском, около его оси, имеется симметричная относительно оси центральная зона, в которой интенсивность поля велика.

Эта так называемая „блестящая область“ имеет диаметр порядка длины волны непосредственно за диском и увеличивается в диаметре с увеличением расстояния от диска. Вокруг этой „блестящей области“ имеется симметричная относительно оси область, в которой интенсивность поля значительно ниже. Эта область может быть названа „физической тенью“, в отличие от геометрической тени, которая представляет собой усеченный конус с образующей, проходящей через источник.

В области „физической тени“ интенсивность поля неодинакова. По мере увеличения y при неизменном x она претерпевает периодические изменения вплоть до другой границы „физической тени“. С наружной стороны „физическая тень“ ограничивается второй областью высокой напряженности поля, в которой напряженность поля монотонно возрастает по мере приближения точки наблюдения к границе геометрической тени и переходе через нее.

Данная работа выполнена по предложению члена-корреспондента АН СССР А. Н. Тихонова. Автор выражает ему свою глубокую благодарность за постановку темы, просмотр рукописи и ценную дискуссию полученных результатов.

Институт автоматики и телемеханики
Академии Наук СССР

Поступило
9 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. B. Baker and E. T. Copson, The Mathematical Theory of Huygens Principles, Oxford, 1939.