Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. И. АХИЕЗЕР

К ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 15 X 1948)

1. Следуя С. Н. Бернштейну, будем называть целую функцию $f(z)$ функцией степени σ, если

$$\sigma = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|}.$$

Условимся, кроме того, говорить, что целая функция $f(z)$ обладает свойством B, если

$$\sup_{R>1} \int_1^R \frac{\ln|f(x)f(-x)|}{x^2}\,dx < \infty. \tag{1}$$

Предметом настоящей заметки является доказательство следующего обобщения одной теоремы М. Г. Крейна.

Теорема. *Пусть $f(z)$ — целая функция степени σ и пусть $f(x)\geqslant 0$ при $-\infty<x<\infty$.*

Для того чтобы имело место равенство

$$f(x) = |\Phi(x)|^2 \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{2}$$

где $\Phi(z)$ — целая функция степени $\sigma/2$, все нули которой лежат в области $\mathrm{Im}\, z\geqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ обладала свойством* B.

Для доказательства нам понадобится

Лемма. *Пусть $f(z)$ — целая функция конечной степени и $z_k=r_k e^{i\vartheta_k}$ $(k=1,2,3,\ldots)$ ее нули, расположенные в порядке неубывания модулей. В таком случае одно из неравенств* (1), (3)

$$\sum{}' \frac{|\sin\vartheta_k|}{r_k} < \infty \tag{3}$$

влечет другое (штрих у знака суммы в (3) означает, что суммирование распространено на те k, для которых $r_k>0$).

2. Примем, чем общность не нарушается, что $f(0)=1$. В таком случае

$$f(z) = e^{cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_m-i\beta_m}\right)e^{\frac{z}{\alpha_m-i\beta_m}},$$

где $\beta_k\geqslant 0$, а c вещественно.

Пусть $f(z)$ обладает свойством В, так что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2}$$

сходится.

В таком случае мы можем положить

$$f(z)=\Phi(z)\,\overline{\Phi}(z),$$

где

$$\Phi(z)=e^{\frac{c}{2}z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}\right)e^{\frac{\alpha_k z}{\alpha_k^2+\beta_k^2}}.$$

На основании критерия Линделёфа принадлежности целой функции целого порядка к нормальному типу, $\Phi(z)$ есть целая функция конечной степени. Мы должны доказать, что ее степень не превосходит $\sigma/2$.

Так как при $y>0$

$$|\Phi(x+iy)|<|\overline{\Phi}(x+iy)|,$$

то достаточно доказать, что при $0<\vartheta<\pi$

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\ln|\overline{\Phi}(re^{i\vartheta})|}{r}\leqslant\frac{\sigma}{2}. \tag{4}$$

Пусть ϑ выбрано. Возьмем какое-нибудь $\delta>0$ так, чтобы

$$\delta<\vartheta<\pi-\delta,$$

и положим

$$F(z)=\prod{}'\left(1-\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}\right),$$

где штрих означает, что произведение распространено на все те k, для которых

$$\delta\leqslant\arg(\alpha_k+i\beta_k)\leqslant\pi-\delta.$$

Такое построение оправдывается тем, что ряд

$$\sum{}'\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\leqslant\sum{}'\frac{\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}$$

сходится и, значит, сходится ряд

$$\sum{}'\frac{1}{|\alpha_k+i\beta_k|}.$$

$F(z)$ есть целая функция минимального типа порядка 1, и тем же свойством обладает $\overline{F}(z)$. Следовательно, полагая

$$\Phi(z)=F(z)\,\Psi(z),$$

где

$$\Psi(z)=e^{\frac{c}{2}z+\sum{}'\frac{\alpha_k z}{\alpha_k^2+\beta_k^2}}\prod{}''\left(1-\frac{z}{\alpha_k+i\beta_k}\right)e^{\frac{\alpha_k z}{\alpha_k^2+\beta_k^2}},$$

мы должны доказать, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\bar{\Psi}(re^{i\vartheta})|}{r} \leqslant \frac{\sigma}{2},$$

иначе говоря, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\left|\frac{\bar{\Psi}(re^{i\vartheta})}{\Psi(re^{i\vartheta})}\right|}{r} \leqslant 0.$$

Имеем

$$\left|\frac{\bar{\Psi}(re^{i\vartheta})}{\Psi(re^{i\vartheta})}\right| \leqslant \prod{}'' \left\{1 + \frac{2\beta_k r}{(\alpha_k^2+\beta_k^2)\sin(\vartheta-\delta)}\right\}.$$

Но

$$\omega(\zeta) = \prod{}'' \left(1 + \frac{\beta_k \zeta}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)$$

есть функция минимального типа порядка 1. Следовательно, неравенство (4) доказано. Таким образом, достаточность условия теоремы доказана.

Что касается необходимости условия, то она является прямым следствием уже упомянутой теоремы Линделёфа.

3. Обратимся теперь к лемме. В частных случаях одна половина леммы встречается в книге Н. Левинсона ([1]), а другая — в книге С. Н. Бернштейна ([2]).

Докажем вначале, что из (1) следует (3). С этой целью возьмем формулу Карлемана

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{\rho_k}{R^2}\right)\sin\theta_k + I\,\frac{F'(0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} \ln|F(Re^{i\varphi})|\sin\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{R}\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)\frac{\ln|F(x)F(-x)|}{x^2}\,dx,$$

которая справедлива для всякой функции $F(z)$, регулярной в области

$$|z| \leqslant R,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi,$$

если $\rho_k e^{i\theta_k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ нули $F(z)$ в этой области и $F(0)=1$.

Применим формулу Карлемана к верхнему и нижнему полукругу, беря функцию $f(z)$ и принимая, что $f(0)=1$.

Складывая обе формулы, получим

$$\sum_{r_k<R}\left(1-\frac{r_k^2}{R^2}\right)\frac{|\sin\vartheta_k|}{r_k} = \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\varphi})|\cdot|\sin\varphi|\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^R\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{R^2}\right)\ln|f(x)f(-x)|\,dx = I_1 + I_2.$$

Так как $f(z)$ — целая функция конечной степени, то

$$|I_1| < A, \qquad |I_2| < B/\pi,$$

если, в соответствии с (1),

$$\int_0^x \frac{\ln|f(t)f(-t)|}{t^2}\,dt < B < \infty \quad (x \geqslant 0).$$

Таким образом,

$$\sum_{r_k<R}\left(1-\frac{r_k^2}{R_k^2}\right)\frac{|\sin\vartheta_k|}{r_k} < A+\frac{B}{\pi}=C,$$

откуда

$$\sum_{r_k<R/2}\frac{|\sin\vartheta_k|}{r_k} < \frac{4}{3}C,$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin\vartheta_k|}{r_k}$$

сходится. Мы видим, что из (1), действительно, следует (3). Остается доказать, что (3) влечет (1). С этой целью используем представление

$$f(z)=e^{\varkappa z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}.$$

В силу этого представления

$$|f(x)f(-x)|^2=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1+\frac{x^4-2x^2r_n^2\cos 2\vartheta_n}{r_n^4}\right\}.$$

Поэтому

$$\int_0^R \frac{\ln|f(x)f(-x)|}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^R \ln\left(1+\frac{x^4-2x^2r_n^2\cos 2\vartheta_n}{r_n^4}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

Остается принять во внимание, что

$$\int_0^R \ln\left(1+\frac{x^4-2x^2r^2\cos 2\vartheta}{r^4}\right)\frac{dx}{x^2}<\int_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^4-2x^2r^2\cos 2\vartheta}{r^4}\right)\frac{dx}{x^2}=\frac{2\pi}{r}|\sin\vartheta|.$$

Поступило
29 IX 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Levinson, Gap and Density Theorems, 1940. [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937.