Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ Н. И. АХИЕЗЕРА — Б. М. ЛЕВИТАНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XI 1948)

В своей работе (1) Н. И. Ахиезер и Б. М. Левитан предложили следующее обобщение метода суммирования Фейера.

Пусть $0 < \theta_n \leqslant 1$ есть некоторая последовательность чисел и

$$G_n(x) = \frac{\cos\frac{1-\theta_n}{\theta_n}x - \cos\frac{x}{\theta_n}}{\pi x^2}.$$

Каждой измеримой на вещественной оси функции $f(x)$, для которой $\frac{f(x)}{1+x^2} \in L(-\infty, \infty)$, ставится в соответствие последовательность интегральных операторов

$$\sigma_n(f; \theta_n; x) = \int_0^\infty \left\{ f\left(x + \frac{t}{n\theta_n}\right) + f\left(x - \frac{t}{n\theta_n}\right) \right\} G_n(t)\, dt. \tag{1}$$

В случае периодичности $f(x)$ при $\theta_n \equiv 1$ они обращаются в обычные суммы Фейера, а при $\theta_n = 1/n$ представляют собой соответствующую сумму Фурье.

В настоящей заметке для метода суммирования (1) устанавливается асимптотическое поведение констант Лебега.

Пусть C (соответственно $\widetilde{C}$) обозначает пространство всех непрерывных на вещественной оси (соответственно непрерывных, с периодом 2π) функций.

Теорема. *При* $\theta_n \geqslant 1/n$

$$\widetilde{L}_n = \| \sigma_n(f; \theta_n; x) \|_{\widetilde{C}} = \| \sigma_n(f; \theta_n; x) \|_C + O(1) = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{1}{\theta_n} + O(1). \tag{2}$$

При $\theta_n \leqslant 1/n$

$$\widetilde{L}_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1), \tag{3'}$$

$$L_n = \| \sigma_n(f; \theta_n; x) \|_C = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{1}{\theta_n} + O(1). \tag{3''}$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \theta > 0$, *то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{L}_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lambda(\theta), \tag{4}$$

где

$$\lambda(\theta)=\frac{2}{\theta\pi}\int_0^\infty \frac{|\sin(2-\theta)t\sin\theta t|}{t^2}\,dt.$$

Доказательство. Известно ([1]), что для функции $f(x)\in\tilde{C}$ суммы (1) могут быть представлены в виде

$$\sigma_n(f;\theta_n;x)=\sum_{|k|<n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)c_k e^{ikx},$$

где c_k — комплексные коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и

$$\varphi(u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant|u|\leqslant 1-\theta_n,\\ \frac{1}{\theta_n}(1-|u|), & 1-\theta_n\leqslant|u|\leqslant 1.\end{cases}$$

Принимая обозначения $m=[n(1-\theta_n)]$,

$$D_m(t)=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}},\qquad K_{n-1}(t)=\frac{\sin^2 n\frac{t}{2}}{2n\sin^2\frac{t}{2}},$$

нетрудно получить, что

$$\sigma_n(f;\theta_n;x)=$$

$$=\frac{1}{\theta_n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{K_{n-1}(t)-\frac{m+1}{n}K_m(t)+\frac{m+1-n(1-\theta_n)}{n}D_m(t)\right\}dt. \quad (5)$$

Следовательно,

$$\tilde{L}_n=\frac{2}{\theta_n\pi}\int_0^\pi\left|K_{n-1}(t)-\frac{m+1}{n}K_m(t)+\frac{m+1-n(1-\theta_n)}{n}D_m(t)\right|dt. \quad (6)$$

Очевидно, что если $\theta_n\leqslant 1/n$, то $m=n-1$, и из последнего соотношения непосредственно получаем (3').

Пусть теперь $\theta_n>1/n$, т. е. $m\leqslant n-2$. В этом случае, в силу ограниченности функции $\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$ для $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, если положить

$$\alpha_n=\frac{2m+1}{n-m-1},\qquad \beta_n=\frac{n-m}{n-m-1}\qquad \gamma_n=\frac{m+1-n(1-\theta_n)}{n-m-1},$$

из (6) находим:

$$\tilde{L}_n=\frac{2(n-m-1)}{n\theta_n\pi}\times$$

$$\times\int_0^{(n-m-1)\pi/2}\frac{|\sin(\alpha_n+\beta_n)u\sin u+\gamma_n(n-m-1)\sin(\beta_n-1)u\sin\alpha_n u|}{u^2}\,du+O(1)=$$

$$= \frac{2(n-m-1)}{n\theta_n\pi} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} \frac{|\sin(\alpha_n+\beta_n)u \sin u + \gamma_n(n-m-1)\sin(\beta_n-1)u \sin\alpha_n u|}{u^2}\, du + O(1),$$

откуда, если учесть, что

$$\frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x} = O(1), \tag{7}$$

получим

$$\tilde{L}_n = \frac{2(n-m-1)}{n\theta_n\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{|\gamma_n \sin\alpha_n u + \sin(\alpha_n+\beta_n)u|}{u}\, du + O(1),$$

или, так как $\beta_n \leqslant 2$, то

$$\tilde{L}_n = \frac{2(n-m-1)}{n\theta_n\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{|\gamma_n + \cos\beta_n u|\ |\sin\alpha_n u|}{u}\, du + O(1).$$

Далее, в силу того, что $\gamma_n \geqslant 0$ и $n-m \geqslant 2$, после некоторых преобразований из последнего соотношения следует

$$\tilde{L}_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{|\sin\alpha_n u|}{u}\, du + O(1). \tag{8}$$

При $\alpha_n \to \infty$, что равносильно $\theta_n \to 0$, правая часть (8) лишь на ограниченную величину отличается от константы Лебега $\frac{4}{\pi^2}\ln\alpha_n + O(1)$. Если $\alpha_n = O(1)$, т. е. $\underline{\lim}_{n\to\infty} \theta_n > 0$, то правая часть (8) ограничена.

Таким образом, для того чтобы получить одно из утверждений теоремы, достаточно заметить, что при $\alpha_n \to \infty$ $\ln\alpha_n = \ln\frac{1}{\theta_n} + O(1)$.

Вторая часть теоремы непосредственно следует из равенства

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\left|\sin\frac{2-\theta_n}{\theta_n} t \sin t\right|}{t^2}\, dt,$$

которое очевидно, если $\sigma_n(f;\theta_n;x)$ представить в форме

$$\sigma_n(f;\theta_n;x) = \frac{1}{n\theta_n\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\cos n(1-\theta_n)t - \cos nt}{t^2}\, dt$$

и, стало быть, в силу (7),

$$L_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\left|\sin\frac{2-\theta_n}{\theta_n} t \sin t\right|}{t^2}\, dt + O(1) =$$

$$= O(1) + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\left|\sin\frac{2-\theta_n}{\theta_n} t\right|}{t}\, dt = \frac{4}{\pi^2} \ln\frac{1}{\theta_n} + O(1).$$

Для доказательства (4) заметим, что из (6), при условии $\varliminf_{n\to\infty}\theta_n>0$, следует соотношение

$$\widetilde{L}_n=\frac{2}{n\theta_n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{|\sin^2 nt-\sin^2(m+1)t|}{\sin^2 t}\,dt+O\left\{\frac{\ln(m+1)}{n}\right\}.$$

Поэтому, в силу применявшихся уже соображений,

$$\widetilde{L}_n=\frac{2}{n\theta_n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{|\sin(n+m+1)t\sin(n-m-1)t|}{t^2}\,dt+o(1)=$$

$$=\frac{2}{\theta_n\pi}\int\limits_0^{n\pi/2}\frac{\left|\sin\left(1+\frac{m+1}{n}\right)t\sin\left(1-\frac{m+1}{n}\right)t\right|}{t^2}\,dt+o(1)=$$

$$=\frac{2}{\theta_n\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\left|\sin\left(1+\frac{m+1}{n}\right)t\sin\left(1-\frac{m+1}{n}\right)t\right|}{t^2}\,dt+o(1).$$

Из последнего равенства, в предположении, что $\lim_{n\to\infty}\theta_n=\theta>0$, предельным переходом получим

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{L}_n=\frac{2}{\theta\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{|\sin(2-\theta)t\sin\theta t|}{t^2}\,dt=\lambda(\theta).$$

Аналогичное равенство для L_n очевидно.

Следствие. *Для того чтобы соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)=f(x)$$

выполнялось для всех непрерывных периода 2π функций, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varliminf_{n\to\infty}\ \theta_n=\theta>0.$$

Необходимость вытекает из известной теоремы о последовательности линейных операторов с неограниченными нормами в полном линейном нормированном пространстве, а достаточность при $m\to\infty$ из неравенства

$$|\sigma_n(f;\,\theta_n;\,x)-f(x)|\leqslant(1+\widetilde{L}_n)E_m(f),$$

где $E_m(f)$ — наилучшее приближение порядка m функции $f(x)$.

При $m=O(1)$ достаточность очевидна.

Днепропетровский государственный университет

Поступило 9 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер и Б. М. Левитан, ДАН, 14, 419 (1937).