Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР В. В. СТЕПАНОВ

О МЕТРИКЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ S_2

Различные классы почти периодических функций могут рассматриваться как замыкание множества тригонометрических полиномов

$$P_N(t) = \sum_1^N a_n e^{i\lambda_n t} \tag{1}$$

(λ_n — неравные действительные числа, a_n — вообще комплексные числа) в пространствах функций, определенных различными метриками (1).

Для введенного автором настоящей статьи (2) класса почти периодических функций, названного впоследствии S_2, эта метрика определяется нормой, которую мы будем писать для комплексной функции действительного переменного $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, в симметричной форме:

$$\| f(t) \|_1^2 = \sup_{-\infty<\alpha<\infty} \frac{1}{2} \int_{\alpha-1}^{\alpha+1} | f(t)^2 \, dt. \tag{2}$$

Цель настоящей заметки — дать широкий класс новых метрик, эквивалентных метрике (2) (в том смысле, что соответствующие расстояния находятся в конечном отношении); одна из таких метрик встречается в статье L. Amerio (3). В заключение дается одна теорема о квадратичных формах, порождаемых положительно определенными функциями.

1. Заметим сначала, что, как доказано в (2), метрика (2) эквивалентна (в вышеуказанном смысле) метрике

$$\| f \|_\delta^2 = \sup_\alpha \frac{1}{2\delta} \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} | f(t) |^2 \, dt,$$

где δ—любое положительное число. В самом деле, легко подсчитать, что если $\delta' < \delta$, то

$$\frac{\delta'}{\delta} \| f \|_{\delta'}^2 \leqslant \| f \|_\delta^2 < \left(1 + \frac{\delta'}{\delta}\right) \| f \|_{\delta'}^2. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть неотрицательная измеримая функция $p(t)$, $-\infty < t < \infty$, удовлетворяет условиям* (A):

1) *$p(t)$ существенно ограничена* (т. е. существует число $M > 0$ такое, что $\operatorname{mes}\{t;\ p(t) > M\} = 0$).

2) *Если обозначить через m_n существенную верхнюю границу $p(t)$ в интервале $2n-1 \leqslant t \leqslant 2n+1$, то ряд*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} m_n = K < \infty. \tag{4}$$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt > 0$; *мы будет предполагать нормировку*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = 1. \tag{5}$$

Тогда все метрики, норма которых определяется формулой

$$\|f\|^2_{p(t)} = \sup_{\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t+\alpha)|^2 p(t)\,dt, \tag{6}$$

эквивалентны метрике (2).

Метрика (2), очевидно, соответствует функции $p(t) = {}^1/_2$ при $|t| \leqslant 1$, $p(t) = 0$ при $|t| > 1$.

Оценим $\|f\|^2_{p(t)}$ сверху. Мы имеем (используя условие (4)):

$$\|f\|^2_{p(t)} \leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\alpha} \int\limits_{2n-1}^{2n+1} |f(t+\alpha)|^2 p(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} m_n \sup_{\alpha} \int\limits_{2n-1}^{2n+1} |f(t+\alpha)|^2\,dt = 2K\|f\|^2_1. \tag{7}$$

Оценим теперь $\|f\|^2_{p(t)}$ снизу. Для функции $p(t)$ найдется число $m > 0$ такое, что множество $E = \{t;\ p(t) \geqslant m\}$ имеет положительную меру; далее. найдется $E_1 \subset E$, $\delta E_1 < 1$, $\operatorname{mes} E_1 = e_1 > 0$. Так как метрики, определяемые функциями $p(t)$ и $p(t+t_0)$, тождественны, мы вправе считать, что $E_1 \subset (0, 1)$.

Для данной функции $f(t)$ в силу (2) существует такое α_0, что

$$\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_0+1} |f(t)|^2\,dt > \frac{\|f\|^2_1}{2};$$

с другой стороны,

$$\|f\|^2_{p(t)} = \sup_{\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t+\alpha)|^2 p(t)\,dt > m \int\limits_{E_1} |f(t+\alpha)|^2\,dt \text{ для любого } \alpha.$$

Берем в правой части последнего неравенства среднее по α в интервале $(\alpha_0-1,\ \alpha_0+1)$; получаем:

$$\|f\|^2_{p(t)} > \frac{m}{2}\int\limits_{\alpha_0-1}^{\alpha_0+1} d\alpha \int\limits_{E_1} |f(t+\alpha)|^2\,dt =$$

$$= \frac{m}{2}\int\limits_{t\in E_1} dt \int\limits_{\alpha_0-1+t}^{\alpha_0+1+t} |f(\tau)|^2\,d\tau > \frac{m}{4}\,e_1\|f\|_1^2. \tag{8}$$

Неравенства (7) и (8) доказывают теорему.

2. Всякой функции $p(t)$, удовлетворяющей условиям (А), соответствует положительно определенная функция

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}p(t)\,dt, \tag{9}$$

причем $\varphi(-\lambda)=\overline{\varphi(\lambda)}$ и, в силу нормировки (5), $\varphi(0)=1$. Зададим последовательность $\{\lambda_n\}$ неравных действительных чисел и вычислим норму полинома (1) в одной из метрик (6).

$$\|P_N\|^2_{p(t)} = \sup_\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n(t+\alpha)}\right|^2 p(t)\,dt =$$

$$= \sup_\alpha \sum_{m,\,n=1}^{N} a_m e^{i\lambda_m\alpha}\,\overline{a}_n e^{-i\lambda_n\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda_m-\lambda_n)t}p(t)\,dt =$$

$$= \sup_\alpha \sum_{m,\,n=1}^{N} \varphi(\lambda_m-\lambda_n)\,a_m e^{i\lambda_m\alpha}\,\overline{a}_n e^{-i\lambda_n\alpha}. \tag{10}$$

Рассмотрим эрмитову форму

$$\Phi_N(a) = \sum_{m,\,n=1}^{N}\varphi(\lambda_m-\lambda_n)\,a_m\overline{a}_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|P_N(t)|^2p(t)\,dt \leqslant \|P_N(t)\|^2_{p(t)}. \tag{11}$$

Пусть функции $p^*(t)$ соответствуют по формуле (9) $\varphi^*(\lambda)$ и по формуле (11) $\Phi_N^*(a)$.

Если форма

$$\Phi(x) = \sum_{m,\,n=1}^{\infty}\varphi(\lambda_m-\lambda_n)\,x_m\overline{x}_n$$

ограничена, то из равенства (10) следует, что при всяком N

$$\|P_N\|^2_{p(t)} \leqslant C\sum_1^N |a_n|^2;$$

из теоремы 1 заключаем, что

$$\| P_N \|^2_{p^*(t)} < C^* \| P_N \|^2_{p(t)} < CC^* \sum_1^N | a_n |^2,$$

а в силу неравенства (11)

$$\Phi^*_N(a) < CC^* \sum_1^N | a_n |^2,$$

т. е. форма

$$\Phi^*(x) = \sum_{m, n=1}^{\infty} \varphi^*(\lambda_m - \lambda_n) x_m \bar{x}_n$$

тоже ограничена. Таким образом доказана

Теорема 2. *Для всего класса функций* $\varphi(\lambda)$ (9), *где* $p(t)$ *удовлетворяет условиям* (A), *формы*

$$\Phi(x) = \sum_{m, n=1}^{\infty} \varphi(\lambda_m - \lambda_n) x_m \bar{x}_n$$

при заданной последовательности $\{\lambda_n\}$ *или все будут ограниченными или неограниченными.*

Поступило
18 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Бор, Почти периодические функции, М. — Л., 1934, 1-е добавление, [2] W. Stepanoff. Math. Ann., 95 (1926). [3] L. Amerio, Ann. Scuola norm. super. Pisa, 2 s., 10 (1941).