Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 5

АСТРОНОМИЯ

В. В. СОБОЛЕВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ЯРКОСТИ ПЛОСКОГО СЛОЯ МУТНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 18 VI 1948)

В астрофизике, геофизике и некоторых других отделах физики весьма часто встречается задача о рассеянии света в мутной среде. При этом сама мутная среда обычно представляется состоящей из плоско-параллельных слоев, а падающее извне излучение — в виде параллельных лучей. Наибольший интерес представляет нахождение интенсивностей диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного света (или соответствующих коэффициентов яркости).

Обычно указанная задача сводится к интегральному уравнению, определяющему количество энергии, рассеиваемое любым элементарным объемом мутной среды. Это интегральное уравнение решается затем последовательными приближениями: путем учета рассеяний первого, второго и т. д. порядков. В астрофизике для решения этой задачи часто применяют также усреднение интенсивности излучения по углам (методы Шваршильда — Шустера и Эддингтона). Однако степень точности всех этих приближений до сих пор не была выяснена.

В настоящей заметке для случая сферической индикатрисы рассеяния выводятся интегральные уравнения, определяющие непосредственно коэффициенты яркости. Эти интегральные уравнения решаются численно для ряда случаев, и найденные таким образом точные значения коэффициентов яркости сравниваются затем с приближенными значениями, даваемыми упомянутыми выше методами. В конце заметки даются точные формулы для коэффициентов яркости при наличии дна, отражающего излучение.

§ 1. Пусть ζ есть косинус угла падения внешнего излучения, η — косинус угла отражения (или пропускания) диффузного излучения, $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ — коэффициенты яркости для отраженного и пропущенного света. Чтобы получить интегральные уравнения для величин $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ воспользуемся уравнением переноса излучения:

$$\eta' \frac{dI(\tau, \eta', \zeta)}{d\tau} = B(\tau, \zeta) - I(\tau, \eta', \zeta) \tag{1}$$

и условием лучевого равновесия:

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \zeta)\, d\eta' + \frac{\lambda S}{4} e^{-\tau/\zeta}. \tag{2}$$

Здесь τ — оптическая глубина данного места, η' — косинус угла, образованного направлением диффузного излучения с внутренней нормалью, $I(\tau, \eta', \zeta)$ — интенсивность диффузного излучения, πS — интенсивность прямого излучения, $B(\tau, \zeta)$ — так называемая „отдача“. Через λ обозначено отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту экстинкции (т. е. к сумме коэффициентов поглощения и рассеяния). Величина λ считается постоянной во всей среде.

Коэффициенты яркости ρ и σ связаны с величинами B и I соотношениями:

$$S\rho(\eta, \zeta)\zeta = I(0, -\eta, \zeta) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta)\, e^{-\tau/\eta} \frac{d\tau}{\eta}, \tag{3}$$

$$S\sigma(\eta, \zeta)\zeta = I(\tau_0, \eta, \zeta) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta)\, e^{-(\tau_0 - \tau)/\eta} \frac{d\tau}{\eta}, \tag{4}$$

где τ_0 есть оптическая толщина всего слоя мутной среды.

Из уравнения (1), сначала умножая его на $e^{-\tau/\eta} d\tau/\eta$, а затем на $e^{-(\tau_0-\tau)/\eta} d\tau/\eta$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0, легко получаем:

$$(\eta + \eta') \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta)\, e^{-\tau/\eta} \frac{d\tau}{\eta} =$$

$$= \eta I(0, -\eta, \zeta) + \eta' I(0, \eta', \zeta) - \eta' e^{-\tau_0/\eta} I(\tau_0, \eta', \zeta), \tag{5}$$

$$(\eta - \eta') \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta)\, e^{-(\tau_0 - \tau)/\eta} \frac{d\tau}{\eta} =$$

$$= \eta I(\tau_0, \eta, \zeta) - \eta' I(\tau_0, \eta', \zeta) + \eta' e^{-\tau_0/\eta} I(0, \eta', \zeta). \tag{6}$$

Умножим теперь уравнение (2) сначала на $e^{-\tau/\eta} d\tau/\eta$, затем на $e^{-(\tau_0-\tau)/\eta} d\tau/\eta$ и проинтегрируем по τ в пределах от 0 до τ_0. Учитывая соотношения (5) и (6), а также (3) и (4), находим:

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta\rho(\eta, \zeta) - \eta'\rho(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'}\, d\eta' -$$

$$- \frac{\lambda}{2} e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{\sigma(\eta', \zeta)}{\eta + \eta'}\, \eta'\, d\eta' + \rho_1(\eta, \zeta), \tag{7}$$

$$\sigma(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\eta\sigma(\eta, \zeta) - \eta'\sigma(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'}\, d\eta' -$$

$$- \frac{\lambda}{2} e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{\rho(\eta', \zeta)}{\eta + \eta'}\, \eta'\, d\eta' + \sigma_1(\eta, \zeta), \tag{8}$$

где надо считать $\rho(\eta', \zeta) = 0$ и $\sigma(\eta', \zeta) = 0$ при $\eta' < 0$. Величины $\rho_1(\eta, \zeta)$ и $\sigma_1(\eta, \zeta)$ суть коэффициенты яркости, обусловленные рассеянием первого порядка, т. е.

$$\rho_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{1 - e^{-\tau_0\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta}\right)}}{\eta + \zeta}, \quad \sigma_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{e^{-\tau_0/\eta} - e^{-\tau_0/\zeta}}{\eta - \zeta}. \tag{9}$$

Уравнения (7) и (8) суть искомые интегральные уравнения, определяющие коэффициенты яркости.

§ 2. Уравнения (7) и (8) легко могут быть решены численными методами. Результаты такого рода вычислений, относящиеся к случаю чистого рассеяния ($\lambda = 1$), даны в табл. 1 и 2. В этих же таблицах для сравнения приведены значения коэффициентов яркости, вычисленные приближенными методами.

В первом столбце каждой из таблиц даются значения оптической толщины слоя, во втором столбце — коэффициенты яркости, обусловленные рассеянием первого порядка, т. е. вычисленные по формулам (9), в третьем столбце — коэффициенты яркости, обусловленные рассеянием первого и второго порядка, т. е. вычисленные по формулам

$$\rho_2(\eta, \zeta) = \left(1 + \frac{1}{2}\eta \ln \frac{1+\eta}{\eta}\right) \rho_1(\eta, \zeta) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\eta\rho_1(\eta, \zeta) - \eta' \rho_1(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} d\eta' - \frac{1}{2} e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{\sigma_1(\eta', \zeta)}{\eta + \eta'} \eta' d\eta' \tag{10}$$

(и аналогично для $\sigma_2(\eta, \zeta)$), в четвертом столбце — точные значения коэффициентов яркости, в пятом — коэффициенты яркости, найденные в приближении Эддингтона. Хотя эти таблицы составлены лишь для случая $\zeta = 1$, $\eta = 1$, они дают правильное общее представление о погрешности каждого из приближенных методов.

Сравнивая друг с другом последние два столбца каждой из приведенных таблиц, мы видим, что для практических применений, не требующих большой точности, можно пользоваться методом Эддингтона при любых оптических толщинах. Это относится, однако, лишь к случаю чистого рассеяния. При наличии поглощения (т. е. при $\lambda < 1$) метод Эддингтона при больших оптических толщинах дает крупную ошибку в коэффициенте пропускания.

Таблица 1

ρ (1, 1)

τ_0	ρ_1	ρ_2	ρ	ρ'
0,2	0,041	0,052	0,055	0,050
0,4	0,069	0,096	0,113	0,10
0,6	0,087	0,129	0,17	0,15
0,8	0,100	0,153	0,22	0,19
1,0	0,108	0,171	0,27	0,23
1,2	0,114	0,183	0,31	0,27
1,4	0,117	0,192	0,36	0,31
1,6	0,120	0,198	0,40	0,35
1,8	0,122	0,202	0,44	0,38
2,0	0,123	0,205	0,47	0,41
∞	0,125	0,212	1,06	1,00

Таблица 2

σ (1, 1)

τ_0	σ_1	σ_2	σ	σ'
0,2	0,041	0,051	0,054	0,050
0,4	0,067	0,093	0,111	0,10
0,6	0,082	0,123	0,16	0,14
0,8	0,090	0,141	0,21	0,18
1,0	0,092	0,150	0,25	0,21
1,2	0,090	0,152	0,28	0,24
1,4	0,086	0,149	0,31	0,27
1,6	0,081	0,143	0,33	0,29
1,8	0,074	0,135	0,35	0,31
2,0	0,068	0,125	0,37	0,32

§ 3. Рассмотрим случай, когда слой мутной среды ограничен снизу дном, отражающим излучение, причем будем считать, что отражение от дна происходит по закону Ламберта. Обозначим через A альбедо дна, через $R(\zeta)$ — коэффициент яркости дна и через $\bar{\rho}(\eta, \zeta)$ и $\bar{\sigma}(\eta, \zeta)$ — коэффициенты яркости мутной среды.

Чтобы получить выражения для величин $\bar{\rho}$ и $\bar{\sigma}$, надо принять во внимание два обстоятельства: во-первых, что интенсивность диффузно-отраженного света складывается из интенсивности света, рассеянного слоем мутной среды, и из интенсивности света, отраженного от дна и ослабленного средой, и во-вторых, что слой мутной среды освещается не только пучком параллельных лучей сверху, но и светом, отраженным от дна, снизу. Учитывая эти обстоятельства, получаем:

$$\bar{\rho}(\eta, \zeta) = \rho(\eta, \zeta) + R(\zeta)\left[e^{-\tau_0/\eta} + 2\int_0^1 \sigma(\eta, \eta')\,\eta'\,d\eta'\right], \tag{11}$$

$$\bar{\sigma}(\eta, \zeta) = \sigma(\eta, \zeta) + 2R(\zeta)\int_0^1 \rho(\eta, \eta')\,\eta'\,d\eta', \tag{12}$$

где $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ суть попрежнему коэффициенты яркости рассматриваемого слоя при $A=0$.

Для величины $R(\zeta)$, очевидно, имеем:

$$R(\zeta) = A\left[e^{-\tau_0/\zeta} + 2\int_0^1 \bar{\sigma}(\eta', \zeta)\,\eta'\,d\eta'\right] \tag{13}$$

или, если принять во внимание соотношение (15),

$$R(\zeta) = \frac{A}{1 - 4AC}\left[e^{-\tau_0/\zeta} + 2\int_0^1 \sigma(\zeta, \eta')\,\eta'\,d\eta'\right], \tag{14}$$

где

$$C = \int_0^1 \eta\,d\eta \int_0^1 \rho(\eta, \eta')\,\eta'\,d\eta'. \tag{15}$$

Таким образом мы видим, что величины $\bar{\rho}$ и $\bar{\sigma}$ явно выражаются через величины ρ и σ.

Пусть $E(\zeta)$ — освещенность верхней границы сверху, $H(0, \zeta)$ — освещенность верхней границы снизу, $H(\tau_0, \zeta)$ — освещенность нижней границы (при $A = 0$). Мы имеем:

$$e^{-\tau_0/\zeta} + 2\int_0^1 \sigma(\eta', \zeta)\,\eta'\,d\eta' = \frac{H(\tau_0, \zeta)}{E(\zeta)}, \quad 2\int_0^1 \rho(\eta', \zeta)\,\eta'\,d\eta' = \frac{H(0, \zeta)}{E(\zeta)}, \tag{16}$$

и формулы (11) и (12) приводятся к виду:

$$\bar{\rho}(\eta, \zeta) = \rho(\eta, \zeta) + \frac{A}{1 - 4AC}\,\frac{H(\tau_0, \zeta)}{E(\zeta)}\,\frac{H(\tau_0, \eta)}{E(\eta)}, \tag{17}$$

$$\bar{\sigma}(\eta, \zeta) = \sigma(\eta, \zeta) + \frac{A}{1 - 4AC}\,\frac{H(\tau_0, \zeta)}{E(\zeta)}\,\frac{H(0, \eta)}{E(\eta)}. \tag{18}$$

Таковы окончательные формулы для коэффициентов яркости при наличии дна, отражающего излучение.

В настоящей заметке мы рассмотрели случай сферической индикатрисы расстояния. Однако интегральные уравнения для коэффициентов яркости можно получить для любой индикатрисы рассеяния. Выводу этих уравнений и их решению будет посвящена особая статья.

Астрономическая обсерватория
Ленинградского государственного
университета

Поступило
7 VI 1948