Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

В. РОХЛИН

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, НЕПРИВОДИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ ЧИСТО ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XI 1948)

В этой заметке я пользуюсь определениями и результатами моих заметок ([1], [2]).

1. Пусть M — пространство Лебега и $L^2(M)$ — унитарное пространство комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля на M. Формула

$$Uf(x)=f(Tx) \quad (x \in M;\ f \in L^2(M))$$

относит каждому автоморфизму T пространства M определенное унитарное преобразование $U=U_T$ пространства $L^2(M)$ ([3]). Спектральные инварианты оператора U_T являются важнейшими из всех известных инвариантов автоморфизма T и называются спектральными инвариантами этого автоморфизма. Известен целый класс автоморфизмов, для которых они полностью решают проблему классификации: это класс *неприводимых* (транзитивных) *автоморфизмов с чисто точечным спектром*. Оказалось, что собственные значения такого автоморфизма являются простыми и образуют (мультипликативную) группу, что эта группа — обозначим ее через $G(T)$ — однозначно определяет тип автоморфизма T и что для всякой не более чем счетной (мультипликативной) группы G комплексных чисел, равных единице по абсолютной величине, существует такой неприводимый автоморфизм T, что $G(T)=G$ ([4]).

От неприводимых автоморфизмов с чисто точечным спектром естественно перейти к автоморфизмам, *все* mod 0 *неприводимые компоненты которых имеют чисто точечный спектр*. Ради краткости, мы будем называть их *автоморфизмами класса* Σ. Пользуясь результатами, изложенными в ([2]), нетрудно дать исчерпывающую классификацию и этих автоморфизмов.

Обозначим через ζ разбиение пространства M, каноническое относительно автоморфизма T, и через T_C — (неприводимую) компоненту автоморфизма T в элементе C разбиения ζ. Если T есть автоморфизм класса Σ, то формула $G_C=G(T_C)$ задает на фактор-пространстве M/ζ определенное семейство групп G_C. Тип этого семейства и определяет однозначно тип автоморфизма T.

Эта классификационная теорема неполна в том отношении, что не дает характеристики получающихся таким образом семейств $\{G_C\}$, т. е. не указывает, какое свойство семейства $\{G_C\}$ эквивалентно измеримости семейства типов $\tau(T_C)$ ([2]). Чтобы восполнить этот пробел, назовем многозначную, но не более чем счетнозначную, числовую функцию измеримой, если она может быть разложена на однозначные ветви, измеримые в обычном смысле *. Оказывается, что определенное на некотором пространстве Лебега семейство $\{G_C\}$ не более чем счетных мультипликативных групп комплексных чисел, равных единице по абсолютной величине, в том и только в том случае изоморфно mod 0 некоторому семейству $\{G(T_C)\}$, если оно измеримо.

Среди автоморфизмов класса Σ находятся, в частности, все автоморфизмы с чисто точечным спектром.

2. Настоящая заметка посвящена полному описанию спектральных свойств** автоморфизмов класса Σ.

Условимся обозначать через z комплексное переменное и через $\varkappa$ — окружность $|z|=1$. Мы будем рассматривать всевозможные меры Лебега — Стильтьеса, определенные на окружности $\varkappa$. Спектральный тип (тип Хеллингера) меры λ мы будем обозначать через $\sigma(\lambda)$. Если спектральный тип σ подчинен спектральному типу σ', то мы будем писать $\sigma \leqslant \sigma'$.

Пусть $r(\sigma) = r_U(\sigma)$ — кратность ненулевого спектрального типа σ относительно определенного в $L^2(M)$ унитарного оператора U.

Как известно:

a) Функция r определена на множестве всех спектральных типов $\sigma > 0$, отлична от нуля только на ограниченном множестве спектральных типов $(0 < \sigma \leqslant \sigma_{\max})$ и может принимать только неотрицательные целые значения и значение ∞.

b) $r\left(\sum_\alpha \sigma_\alpha\right) = \min_\alpha r(\sigma_\alpha)$ для всякой конечной или счетной системы спектральных типов σ_α.

Этими свойствами функция r_U вполне характеризуется: для всякой функции r, обладающей свойствами a) и b), существует такой определенный в $L^2(M)$ унитарный оператор U, что $r_U = r$. Так как функция r_U заключает в себе полную систему спектральных инвариантов оператора U, то мы можем теперь формулировать нашу проблему следующим, более определенным образом: *каким дополнительным условиям должна удовлетворять функция r, чтобы существовал автоморфизм T класса Σ, для которого $r_{U_T} = r$?*

3. Чтобы ответить на этот вопрос, введем некоторые обозначения. Рассмотрим преобразование окружности $\varkappa$, определяемое формулой $\varphi_n(z) = z^n$. Преобразование φ_n переводит каждый спектральный тип σ в другой спектральный тип, который мы обозначим через σ^n. Вместе преобразования φ_n определяют разбиение окружности $\varkappa$ на классы рациональности: числа $z_1, z_2 \in \varkappa$ принадлежат к одному и тому же классу рациональности R, если существуют такие целые числа p, q, что $z_1^p = z_2^q$. Это разбиение мы обозначим через ρ. Спектральный тип σ мы назовем разложимым (относительно ρ), если разбиение ρ измеримо относительно мер этого типа, и вполне неразложимым, если единственный подчиненный ему разложимый спектральный тип есть нулевой тип.

Если мера λ принадлежит к разложимому спектральному типу σ, то имеет смысл говорить не только о мере λ_ρ в фактор-пространстве $\varkappa/\rho$ (см. ([1]), n°8), но и о канонической системе мер λ_R (([1]), n° 10), определенных в классах рациональности. Пусть Λ_R — множество тех точек (чисел) класса R, меры которых относительно λ_R положительны.

---

* Это определение согласуется с определением измеримости многозначной функции, данным в ([2]).

** По поводу всех применяемых ниже понятий спектральной теории операторов см. ([5]).

При замене меры λ другой мерой спектрального типа σ множества Λ_R остаются без изменения для всех $\mathrm{mod}\,0$ (относительно λ_ρ) классов R. В этом смысле они вполне определяются спектральным типом σ. Если для всех $\mathrm{mod}\,0$ классов R множества Λ_R являются (мультипликативными) группами, то мы называем разложимый спектральный тип σ *групповым*.

Пусть r — произвольная функция, удовлетворяющая условиям a) и b) n° 2. Групповой тип σ мы называем *максимально-групповым* относительно r, если $r(\sigma) > 0$, но $r(\sigma') = 0$ для всякого группового типа $\sigma' > \sigma$. *Систему* попарно различных максимально-групповых типов σ_α мы называем *максимальной* относительно заданного (произвольного) спектрального типа σ, если пересечение типа σ со всеми типами σ_α отлично от нуля, но становится равным нулю, как только к системе $\{\sigma_\alpha\}$ присоединяется новый максимально-групповой тип. Минимальную мощность максимальной относительно от системы мы называем *индексом* спектрального типа σ относительно r и обозначаем через $i(r;\sigma)$. Положим $r^{(1)}(\sigma) = r(\sigma) - i(r;\sigma,)$ причем условимся приписывать разности $r(\sigma) - i(r;\sigma)$ значение ∞ во всех случаях, когда $r(\sigma) = \infty$. Если функция $r^{(1)}$ удовлетворяет условиям a) и b), то мы полагаем таким же образом $r^{(2)}(\sigma) = r^{(1)}(\sigma) - i(r^{(1)};\sigma)$, и т. д.

4. Теперь мы в состоянии формулировать основной результат.

Пусть r — функция, обладающая свойствами a) и b). Для того чтобы существовал автоморфизм T класса Σ, у которого $r_{U_T} = r$, необходимо и достаточно, чтобы функция r удовлетворяла следующим условиям:

c) Для всякого спектрального типа $\sigma > 0$ и всякого целого n имеет место неравенство $r(\sigma^n) \geqslant r(\sigma)$.

d) Вместе с функцией r свойствами a), b), c) обладают и все функции $r^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

e) Для всякого вполне неразложимого спектрального типа σ либо $r(\sigma) = 0$, либо $r(\sigma) = \infty$.

Пример. Спектральный тип обычной меры Лебега вполне неразложим относительно ρ и потому имеет либо нулевую, либо бесконечную кратность относительно любого автоморфизма класса Σ.

Можно доказать и несколько больше: если спектр автоморфизма класса Σ содержит абсолютно непрерывную компоненту, то он содержит и тип меры Лебега со счетной кратностью.

Поступило
12 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Рохлин, ДАН, **58**, № 1 (1947). [2] В. Рохлин, ДАН, **58**, № 2 (1947). [3] E. Hopf, Ergodentheorie, Berlin, 1937. [4] P. R. Halmos and J. v. Neumann, Ann. of Math., 43, 332 (1942). [5] А. И. Плеснер и В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, 1. в. 1 (1946).