Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. ПОСТНИКОВ

СТРОЕНИЕ КОЛЕЦ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 16 VI 1948)

В предлагаемой заметке изложены результаты моей студенческой работы, выполненной весной 1945 г. под руководством Л. С. Понтрягина.

Работа посвящена всестороннему выяснению алгебраического строения колец пересечений трехмерных многообразий, в которых за область коэффициентов принято кольцо $\mathfrak{R}_2$ вычетов по модулю 2. Хотя полученные результаты с соответствующими изменениями имеют место и для любых других областей коэффициентов, но использование $\mathfrak{R}_2$ позволяет, во-первых, охватить и случай неориентируемых многообразий, и во-вторых, новые соотношения для колец пересечений, указанные ниже, наиболее отчетливо выступают именно для этой области коэффициентов.

Δ-кольцом я, ради краткости, назову кольцо пересечения любого трехмерного многообразия $\mathfrak{M}$ по области коэффициентов $\mathfrak{M}_2$ и буду обозначать его через $\Delta(\mathfrak{M})$ или просто Δ. Если $\mathfrak{M}$ ориентируемо, то $\Delta(\mathfrak{M})$ я также назову ориентируемым.

Напомню известные алгебраические факты, касающиеся строения Δ-колец:

1) Аддитивная группа Δ имеет вид $\Delta^0 + \Delta^1 + \Delta^2 + \Delta^3$, где $\Delta^0 = (q)$, $2q = 0$; $\Delta^1 = (u_1) + \ldots + (u_p)$, $2u_i = 0$; $\Delta^2 = (v_1) + \ldots + (v_p)$, $2v_i = 0$; $\Delta^3 = (e)$, $2e = 0$.

2) Δ-кольцо коммутативно и e служит его единицей.

3) Если $x \neq e$, то $xq = 0$.

4) Для любых $u, u' \in \Delta^1$: $uu' = 0$.

5) $u_i v_j = \delta_{ij} q$ (закон двойственности Пуанкаре—Веблена).

6) Для любых $v, v' \in \Delta^2$: $vv' \in \Delta^1$.

Любое абстрактно заданное кольцо M с отмеченными в нем группами Δ^i, обладающее перечисленными свойствами, назовем M-кольцом. Элемент M-кольца, принадлежащий к Δ^i, назовем i-мерным. Число p назовем рангом M-кольца. Под изоморфизмом M-колец мы будем понимать изоморфизм, сохраняющий размерность элементов. Возникает вопрос: всякое ли M-кольцо изоморфно некоторому Δ-кольцу?

Ответ оказывается отрицательным: существуют M-кольца, неизоморфные никакому Δ-кольцу. Таким образом, для полной алгебраической характеристики Δ-колец необходимо пополнить список их свойств. С этой целью вспомним, что $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда обладает двумерным кручением, когда оно неориентируемо. В этом случае его двумерная группа кручения является циклической группой второго порядка. Ее образующий элемент мы обозначим через v_0^*. Этому классу целочисленных гомологий соответствует отличный от нуля класс v_0 гомологий по модулю 2. Мы назовем его разрезающим многообразие $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ ориентируемо, мы положим $v_0 = 0$. Непосредственным, хотя довольно кропотливым подсчетом можно доказать следующую теорему:

Теорема о самопересечениях. *Для любых $v, v' \in \Delta^2 \subset \Delta(\mathfrak{M})$ имеет место тождество*

$$vvv' + vv'v' = vv'v_0. \tag{1}$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению: M-кольцо M называется MS-кольцом, если в группе $\Delta^2 \subset M$ отмечен определенный элемент v_0 такой, что для любых двух элементов $v, v' \in \Delta^2$ имеет место равенство (1). v_0 назовем разрезающим элементом MS-кольца M. Если $v_0 = 0$, то MS-кольцо назовем ориентируемым. Под изоморфизмом MS-колец мы будем понимать изоморфизм, не только сохраняющий размерность, но и переводящий разрезающий элемент в разрезающий. Δ-кольцо многообразия $\mathfrak{M}$ можно, естественно, рассматривать как MS-кольцо, если принять за разрезающий элемент класс гомологий, разрезающий многообразие $\mathfrak{M}$.

Основная теорема. *Любое MS-кольцо изоморфно некоторому Δ-кольцу.*

Наметим доказательство этой теоремы.

1) Пусть M есть некоторое MS-кольцо ранга p с выбранным базисом

$$q;\ u_1, \ldots, u_p;\ v_1, \ldots, v_p;\ e. \tag{2}$$

В случае неориентируемого MS-кольца базис в нем мы всегда будем выбирать так, чтобы $v_0 = v_1$. При заданном базисе (2) кольцо M определяется вычетами a_{ijk} по модулю 2, задаваемыми соотношениями

$$a_{ijk}q = v_i v_j v_k \qquad (i, j, k = 1, \ldots, p). \tag{3}$$

Соотношение (1) в терминах вычетов a_{ijk} получает вид:

$$a_{iij} + a_{ijj} = \begin{cases} 0, & \text{если } M \text{ ориентируемо;} \\ a_{ij1}, & \text{если } M \text{ неориентируемо.} \end{cases} \tag{4}$$

MS-кольцу M ранга p с базисом (2) поставим в соответствие MS-кольцо M' ранга $p-1$ с базисом

$$q';\ u'_1, \ldots, u'_{p-1};\ v'_1, \ldots, v'_{p-1};\ e', \tag{5}$$

задаваемое вычетами

$$a_{ijk} \qquad (i, j, k = 1, \ldots, p-1). \tag{6}$$

Легко проверяется, что M' действительно является MS-кольцом, ориентируемым или неориентируемым одновременно с M.

Если, наоборот, MS-кольцо M' с базисом (5) задано вычетами (6), то, в силу соотношения (4), для определения по нему кольца M с базисом (2) достаточно знать вычеты

$$a_{ijp} \quad (i, j = 1, \ldots, p-1), \qquad a_{ppp}, \tag{7}$$

причем эти вычеты можно задать произвольно. Кольцо M назовем расширением кольца M'.

2) Покажем, что если M' есть Δ-кольцо, то M также есть Δ-кольцо.

Допустим, что существует многообразие $\mathfrak{M}'$, Δ-кольцо которого изоморфно заданному MS-кольцу M'.

Пусть K' — простой замкнутый полигон из $\mathfrak{M}'$, гомологичный нулю в $\mathfrak{M}'$ как цикл по модулю 2. Обозначим через C' какую-нибудь полиэдральную поверхность, осуществляющую указанную гомологию, через T' — малую торовидную окрестность полигона K' и через Γ' — ее границу. Будем считать, что пересечение поверхностей C' и Γ' происходит по простой замкнутой кривой X'. На поверхности Γ' определим еще одну замкнутую кривую Y' с тем условием, что она пересекается с X' лишь в одной точке и, сверх того, гомотопна нулю в $\overline{T}' = T' \cup \Gamma'$. Разрежем многообразие $\mathfrak{M}'$ по поверхности Γ'. Тогда мы получим два куска $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}' \setminus T'$ и $\overline{T}$. Поверхность Γ', рассматриваемую в этих кусках, обозначим, соответственно, через Γ^* и Γ. Линии, соответствующие линиям X' и Y', обозначим на поверхности Γ через X и Y, а на поверхности Γ^* через X^* и Y^*. Склеим теперь куски $\mathfrak{M}^*$ и $\overline{T}$ их поверхностями Γ^* и Γ так, чтобы при склеивании линии X^* и Y^* перешли, соответственно, в Y и X. Так полученное многообразие обозначим через $\mathfrak{M}$, а самую конструкцию назовем *перестройкой*. Легко видеть, что $\Delta(\mathfrak{M})$ имеет ранг p и является расширением кольца $\Delta(\mathfrak{M}')$. Мы уже знаем, что это расширение характеризуется вычетами

$$a_{ijp} \quad (i, j < p), \qquad a_{ppp}.$$

Оказывается, что, подбирая надлежащим образом K' и C', можно получить расширение с произвольными a_{ijp} $(i, j = 1, \ldots, p-1)$. Далее, оставляя на месте K' и варьируя C', можно получить любое a_{ppp}, не меняя a_{ijp} $(i, j = 1, \ldots, p-1)$. Таким образом, если M — любое расширение кольца M' и $M' \approx \Delta(\mathfrak{M}')$, то описанным путем можно построить такое многообразие $\mathfrak{M}$, что

$$M \approx \Delta(\mathfrak{M}).$$

Этим наше утверждение доказано.

Указанная конструкция позволяет индуктивно построить многообразие $\mathfrak{M}$ с произвольно заданным MS-кольцом. Построение следует начинать с кольца ранга нуль в ориентируемом случае и ранга единица в неориентируемом. В первом случае исходным многообразием может служить трехмерная сфера, во втором трехмерная бутылка Клейна, т. е. произведение отрезка на двумерную сферу, в котором края склеены так, чтобы получилось неориентируемое многообразие.

Поступило
15 VI 1948