Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. Я. НЕЙШУЛЕР

О ТАБУЛЯРНОЙ ОДНОЗНАЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 V 1948)

В статье (1) мы ввели понятие эквивалентности сходных представлений. Разъясним на примере представлений вида А более подробно, что мы понимаем под эквивалентностью.

Пусть для функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существуют два представления вида А:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_k(\ldots f_2(f_1(x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_3}) \ldots), x_{i_{k+1}})), \tag{A$_1$}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_k(\ldots \varphi_2(\varphi_1(x_{i_1}, x_{i_2}) x_{i_3}), \ldots), x_{i_{k+1}})), \tag{A$_2$}$$

($i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$ — какая-нибудь последовательность индексов $1, 2, \ldots, n$ без повторений, если $k = n - 1$, и с повторениями, если $k > n - 1$, и $i_s \neq i_{s+1}$), у которых порядок „наслаивания“ аргументов один и тот же (такие представления мы называем сходными).

Тогда эквивалентность этих представлений означает существование следующих рекуррентных соотношений: $f_1 = \psi_1(\varphi_1)$; далее, если обозначить $f_2(f_1, x_{i_3}) = f_2[\psi_1(\varphi_1), x_{i_3}] = f_2^*(\varphi_1, x_{i_3})$, то имеет место $f_2^* = \psi_2(\varphi_2)$, и вообще, если обозначить, $f_p(f_{p-1}, x_{i_{p+1}}) = f_p[\psi_{p-1}(\varphi_{p-1}), x_{i_{p+1}})] = f_p^*(\varphi_{p-1}, x_{i_{p+1}})$, то имеет место $f_p^* = \psi_p(\varphi_p)$, где $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ — какие-нибудь функции одного переменного ($p = 1, 2, \ldots, k-1$).

Если функция, k-членно табулируемая, на данном представлении обладает тем свойством, что все другие возможные для нее представления, сходные с данным, вместе с ним эквивалентны, то такую функцию будем называть табулярно-однозначной на данном представлении. Вместе с ней будем и само представление называть табулярно-однозначным.

Практический смысл введенного нами понятия табулярной однозначности функции на данном представлении заключается в том, что если k-членно табулируемая на основе данного конкретного представления функция табулярно-однозначна, то при выборе варианта конструкции k-членной таблицы, основанной на представлении данного вида, безразлично, каким именно представлением данного вида пользоваться, так как в силу эквивалентности этих представлений соответствующие конструкции k-членных таблиц не должны отличаться одна от другой.

Таким образом, при выборе оптимальной табличной конструкции, основанной на каком-нибудь конкретном представлении данного вида, удовлетворяющего условию табулярной однозначности, можно не интересоваться всевозможными другими сходными с данными представлениями.

Легко убедиться, что лемма о табулярной однозначности [1] всякой двучленно-табулируемой функции трех переменных обобщается на случай $(n-1)$-членно табулируемой функции n переменных.

Остановимся на вопросе о табулярной однозначности трехчленно-табулируемых функций трех переменных. Трехчленно-табулируемые функции трех переменных — это функции, допускающие либо представление вида

$$F\left[f_1(x_i, x_j),\ f_2(x_i, x_k)\right], \tag{I}$$

либо вида

$$\varphi_3\{\varphi_2[\varphi_1(x_i, x_j),\ x_k],\ x_p\} \tag{II}$$

(i, j, k — какая-нибудь перестановка индексов $1, 2, 3$ и $p = i$ или j).

Пусть функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ допускает следующее частное представление вида (I):

$$f(x_1, x_2, x_3) = F\left[f_1(x_i, x_j) + f_2(x_i, x_k)\right]. \tag{а}$$

Легко убедиться, что на этом представлении наша функция не обладает свойством табулярной однозначности.

Действительно, если функция $f(x_1, x_2, x_3)$ допускает представление (а), то она допускает и следующее, сходное с ним представление вида (I)

$$F\left[f_1^*(x_i, x_j) + f_2^*(x_i, x_k)\right], \tag{б}$$

где $f_1^* = f_1(x_i, x_j) + \gamma(x_i)$, а $f_2^* = f_2(x_i, x_k) - \gamma(x_i)$, γ — произвольная функция одного переменного. Но представления (а) и (б), будучи сходными, очевидно, неэквивалентны. Следовательно, функция, допускающая представление (а) вида (I), на нем табулярно-неоднозначна.

Покажем, что представление (а) является единственным табулярно-неоднозначным частным представлением вида (I).

В статье [2] нами были даны условия существования у $f(x_1, x_2, x_3)$ представления (I) в виде

$$\frac{\partial A}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial x_j} = 0,$$

где

$$A = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} : A_{kj}\right)}{\dfrac{\partial^2 \ln(A_{jk})}{\partial x_j\, \partial x_k}} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}},$$

$$B = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} : A_{kj}\right)}{\dfrac{\partial^2 (\ln A_{kj})}{\partial x_j\, \partial x_k}} = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial x_k}},$$

$$A_{mn} = \frac{\partial f}{\partial x_m} : \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Нетрудно убедиться, что если знаменатели и числители выражений A и B не равны нулю, то табулярная однозначность соответствующих представлений обеспечена.

Пусть числитель у A равен нулю. Тогда f_1 будет зависеть только от x_j, и трехчленное представление вида (I) „перерождится" в двухчленное вида $F[f_1(x_j), f_2(x_i, x_k)]$. Соответственно, когда числитель у B равен нулю, получаем двухчленное представление $F[f_1(x_i, x_j), f_2(x_k)]$.

Так как мы рассматриваем трехчленные представления, то эти случаи исключаются. Точно так же, очевидно, исключается и случай, когда оба числителя равны нулю.

Пусть теперь знаменатель у A равен нулю (заметим, что знаменатели у A и B могут быть равны нулю лишь одновременно). В этом случае мы для нашей функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ получим общее представление вида

$$F\{[f_1(x_i, x_j) + f_2(x_i, x_k)], \eta(x_i)\}, \tag{в}$$

т. е. искомое нами трехчленное представление „перерождается" в четырехчленное.

Если же исключить из представления (в) функцию $\eta(x_i)$, то мы как раз и получим трехчленное представление (а) вида (I), на котором наша функция, как мы выше показали, табулярно-неоднозначна. Таким образом мы приходим к следующей лемме.

Лемма 1. *Для того чтобы функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ была табулярно-неоднозначна на трехчленном представлении вида*

$$F[f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_k)],$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее частное представление вида (I):

$$f(x_1, x_2, x_3) = F[f_1(x_i, x_j) + f_2(x_i, x_k)]. \tag{г}$$

Легко убедиться, что для представления (II) имеет место аналогичная лемма.

Лемма 2. *Для того чтобы функция трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ была табулярно-неоднозначна на трехчленном представлении вида* II, *необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее частное представление вида* II

$$f(x_1, x_2, x_3) = \varphi_3\{[\varphi_1(x_i, x_j) + \varphi_2(x_k)], x_i\}. \tag{д}$$

Будем называть представления (г) и (д) вырожденными (в них одна из операций взятия функции двух переменных сводится к сложению).

Предыдущее дает следующую теорему.

Теорема. *Для табулярной однозначности функции трех переменных на трехчленных представлениях необходима и достаточна невырожденность этих представлений.*

Поступило
23 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Я. Нейшулер, ДАН, **60**, № 6 (1948). [2] Л. Я. Нейшулер, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **20** (1947).