Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 VI 1948)

В некоторых предыдущих работах автора ([1], [2]) был предложен метод для фактического построения формул численного интегрирования дифференциальных уравнений. Данная работа обобщает предыдущие работы автора. В ней даются формулы численного интегрирования дифференциальных уравнений с разностями, лежащими на зигзагообразных линиях.

Используя формулу Тэйлора с остаточным членом в интегральной форме и интерполяционную формулу Ньютона, мы находим:

$$y^{(k)}(a+ht_\beta)=\sum_{\lambda=0}^{n-k-1}(t_\beta-t_\alpha)^\lambda\frac{h^\lambda}{\lambda!}y^{(k+\lambda)}(a+ht_\alpha)+$$
$$+\frac{h^{n-k}}{n-k!}(t_\beta-t_\alpha)^{n-k}y^{(n)}(a)+$$
$$+h^{n-k}\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu h^\nu y^{(n)}(a,a+t_1h,\ldots,a+t_\nu h)+R, \tag{1}$$

$$A_\nu=\frac{1}{(n-k-1)!}\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-k-1}\prod_{k=0}^{\nu-1}(t-t_k)\,dt,$$

$$R=\frac{h^{n+r+1-k}}{(n-k-1)!}\times$$

$$\times\int_{t_\alpha}^{t_\beta}(t_\beta-t)^{n-k-1}\prod_{k=0}^{r}(t-t_k)\,y^{(n)}(a+th,a,a+t_1h,\ldots,a+t_rh)\,dt.$$

Здесь $t_0=0$, t_1, $t_2,\ldots,t_r$, a, h, t_α и t_β — произвольные числа, а $y^{(n)}(a+th,a,a+t_1h,\ldots,a+t_\nu h)$ — разделенная разность ν-го порядка для a, $a+t_1h,\ldots,a+t_\nu h$.

Формула (1) содержит, как частные случаи, известные интерполяционные формулы с разностями, расположенными на одной наклонной или горизонтальной линии. Но из нее получаются и многие другие формулы, характеризуемые теми или иными перестановками чисел a, $a+t_1h,\ldots,a+t_rh$. Среди этих формул мы встретимся с новыми формулами, имеющими разности, лежащие на зигзагообразных линиях.

Для сокращения записи введем полином степени λ: $t^{(\lambda)}=t(t-1)\ldots$ $\ldots(t-\lambda+1)$. При $\lambda=0$ мы припишем этому полиному значение 1.

Построим формулу, соответствующую интерполяционным узлам $a, a+h, \ldots, a+rh$ и числам $t_\alpha = 0$, $t_\beta = 1$. Пользуясь (1), находим

$$y^{(k)}(a+h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{h^\lambda}{\lambda!} y^{(k+\lambda)}(a) +$$

$$+ h^{(n-k)} \sum_{\lambda=0}^{r} \frac{\Delta^\lambda y^{(n)}(a)}{\lambda!(n-k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{(\lambda)} dt + R, \tag{2}$$

$$R = \frac{h^{n-k+r+1}}{(n-k-1)!\,(r+1)!} y^{(n+r+1)}(a+\vartheta h) \int_0^1 (1-t)^{n-k-1} t^{r+1} dt,$$

где ϑ заключается между 0 и r. В случае интерполяционных узлов $a+h, a, a+2h, \ldots, a+rh$ и чисел $t_\alpha = 1$, $t_\beta = 2$ находим:

$$y^{(k)}(a+2h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{h^\lambda}{\lambda!} y^{(k+\lambda)}(a+h) + \frac{h^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n)}(a+h) +$$

$$+ \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!} \left\{ \Delta y^{(n)}(a) + \sum_{\lambda=2}^{r} \frac{\Delta^\lambda y^{(n)}(a)}{\lambda!} \int_1^2 (2-t)^{n-k-1} t^{(\lambda)} dt \right\} + R, \tag{3}$$

$$R = \frac{h^{n-k+r+1} y^{(n+r+1)}(a+\vartheta h)}{(n-k-1)!\,(r+1)!} \int_1^2 (2-t)^{n-k-1} t^{(r+1)} dt.$$

Для узлов интерполирования $a+2h, a+h, a, a+3h, a+4h, \ldots, a+rh$ и чисел $t_\alpha = 2$, $t_\beta = 3$ получается формула:

$$y^{(k)}(a+3h) = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{h^\lambda}{\lambda!} y^{(k+\lambda)}(a+2h) + \frac{h^{n-k}}{(n-k)!} y^{(n)}(a+2h) +$$

$$+ \frac{h^{n-k}}{(n-k+1)!} \Delta y^{(n)}(a+h) + \frac{n-k+4}{2(n-k+2)!} h^{n-k} \Delta^2 y^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!} \sum_{\lambda=3}^{r} \frac{\Delta^\lambda y^{(n)}(a)}{\lambda!} \int_2^3 (3-t)^{n-k-1} t^{(\lambda)} dt + R, \tag{4}$$

$$R = \frac{h^{n-k+r+1}}{(n-k-1)!\,(r+1)!} \int_2^3 (3-t)^{n-k-1} t^{(r+1)} dt.$$

Выведенными формулами удобно воспользоваться для численного интегрирования дифференциального уравнения n-го порядка. При $k=0$, $n=1$, $r=3$ формулы (2), (3) и (4) приводят к формулам А. Н. Крылова ([3]) для составления исходной таблицы интеграла (дифференциального уравнения 1-го порядка) методом последовательных приближений.

Поступило
25 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Е. **Микеладзе**, Изв. АН СССР, сер. матем., **5—6**, 629 (1939). [2] Ш. Е. **Микеладзе**, Сообщ. АН Груз. ССР, **3**, 10, 1001 (1942). [3] А. Н. **Крылов**, Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференц. уравнений, 1923, стр. 24—25.