Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

О КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VI 1948)

Пусть задан метод суммирования рядов Фурье, т. е. некоторая последовательность линейных операторов, определенным образом ставящая в соответствие каждой функции $f(x) \in C$ последовательность тригонометрических сумм.

В теории приближений, а также в вопросах о сходимости этой последовательности операторов известную роль играет знание асимптотического поведения их норм, которые принято называть константами Лебега.

Пусть $\{\alpha_n\}$ — произвольная последовательность и $S_n(f, x)$ — конечная сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Каждая последовательность $\{\alpha_n\}$ определяет тригонометрическую сумму вида

$$\omega_n(f, \alpha_n, x) = \frac{1}{2}\{S_n(f, x) + S_n(f, x + \alpha_n)\}. \tag{1}$$

Методы суммирования типа (1) впервые рассматривались С. Н. Бернштейном ([1]) и Рогозинским ([2]). В этой работе мы даем асимптотическое выражение соответствующих им констант Лебега $L_n(\alpha_n)$.

Не ограничивая общности, можно считать $|\alpha_n| \leqslant \pi$.

Теорема. *Для $|\alpha_n| \leqslant \pi$ имеет место асимптотическое равенство*

$$L_n(\alpha_n) = \frac{4}{\pi^2} \frac{1 + |n\alpha_n|}{\left\{|\alpha_n| + \frac{1}{n}\right\}} \left|\cos\frac{2n+1}{4}\alpha_n\right| + O(1). \tag{2}$$

Полагая $\alpha_n = 0$, в правой части (2) получим известную константу Лебега для сумм Фурье. При $\alpha_n = \frac{2k\pi}{2n+1}$, где k — некоторая целочисленная функция от n, получим асимптотические выражения, ранее найденные автором ([3]).

Доказательство. Из соотношения

$$L_n(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0 \left| \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} = \frac{\sin(2n+1)\left(u + \frac{\alpha_n}{2}\right)}{\sin\left(u + \frac{\alpha_n}{2}\right)} \right| du \tag{3}$$

убеждаемся в равенстве $L_n(\alpha_n) = L_n(-\alpha_n)$. Поэтому достаточно считать $0 < \alpha_n \leqslant \pi$. Пусть $k = k(\alpha_n)$ есть ближайшее к числу $\frac{(2n+1)\alpha_n}{2\pi}$ целое нечетное число (если число $\frac{(2n+1)\alpha_n}{2\pi}$ является целым четным, то под k условимся понимать меньшее из двух ближайших нечетных). Очевидно, что $0 < k \leqslant n+1$ и $\alpha_n = \frac{k\pi}{2n+1} + 2\varepsilon_n$, где $|\varepsilon_n| \leqslant \frac{\pi}{2n+1}$. После некоторых преобразований получим, что

$$L_n(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/(2n+1)} \left\{\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin\left(u+\frac{i\pi}{2n+1}\right)} - \frac{\sin(2n+1)(u+\varepsilon_n)}{\sin\left(u+\frac{k+i}{2n+1}\pi+\varepsilon_n\right)}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\sin(2n+1)u}{\sin\left(u-\frac{i\pi}{2n+1}\right)} - \frac{\sin(2n+1)(u+\varepsilon_n)}{\sin\left(u+\frac{k-i}{2n+1}\pi+\varepsilon_n\right)}\right|\right\} du,$$

откуда, имея в виду, что для $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ справедливо соотношение $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = O(1)$, в силу равенства

$$\int_0^{\pi/(2n+1)} \frac{\sin(2n+1)u}{u}\, du = O(1),$$

после повторного применения замены индексов суммирования и некоторых преобразований можно получить соотношение

$$L_n(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n-k}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i+k}\right| + \right.$$

$$+ \sum_{i=n-k+1}^{n}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{2n-i-k+1}\right| +$$

$$\left. + {\sum_{i=1}^{n}}'\left|\frac{\sin u}{i} + \frac{\sin(u+\delta_n)}{k-i}\right|\right\} du + O(1), \tag{4}$$

где $\delta_n = (2n+1)\varepsilon_n$ и штрих у третьей суммы обозначает, что при суммировании исключается индекс $i = k$.

Предположим пока, что $k < \frac{n}{2}$. В этом случае, если учесть равенства

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i+k} = O(1), \qquad \sum_{i=k+1}^{n-k}\frac{k}{i(i+k)} = O(1),$$

получим

$$J_1 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{n-k}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i+k}\right| du =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i+k}\right| du + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=k+1}^{n-k}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i+k}\right| du =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\ln k + \frac{2}{\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\frac{n-k}{k} + O(1). \qquad (5)$$

Далее, так как

$$\sum_{i=n-k+1}^{n}\frac{1}{i} = O(1), \qquad \sum_{i=n-k+1}^{n}\frac{1}{2n-i-k+1} = O(1),$$

то

$$J_2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=n-k+1}^{n}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{2n-i-k+1}\right| du = O(1). \qquad (6)$$

И, наконец,

$$J_3 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{n}{}'\left|\frac{\sin u}{i} + \frac{\sin(u+\delta_n)}{k-i}\right| du = J_3' + J_3'' + J_3''',$$

где

$$J_3' = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{k-1}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i-k}\right| du,$$

$$J_3'' = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=k+1}^{2k}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i-k}\right| du,$$

$$J_3''' = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=2k+1}^{n}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i-k}\right| du.$$

Но из равенства

$$J_3' = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i-k}\right| du + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sum_{i=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k-1}\left|\frac{\sin u}{i} - \frac{\sin(u+\delta_n)}{i-k}\right| du$$

и соотношений

$$\sum_{i=k}^{2k}\frac{1}{i} = O(1), \qquad \sum_{i=2k+1}^{n}\frac{k}{i(i-k)} = O(1)$$

можно убедиться, что

$$J_3' = \frac{2}{\pi^2}\ln k + O(1), \quad J_3'' = \frac{1}{\pi^2}\ln k + O(1),$$

$$J_3''' = \frac{2}{\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\frac{n}{k} + O(1). \qquad (7)$$

Стало быть,

$$J_3 = \frac{3}{\pi^2}\ln k + \frac{2}{\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\frac{n}{k} + O(1). \tag{8}$$

Из (5), (6) и (8) следует, что

$$L_n(\alpha_n) = J_1 + J_2 + J_3 + O(1) = \frac{4}{\pi^2}\ln k + \frac{4}{\pi^2}\left|\sin\frac{\delta_n}{2}\right|\ln\frac{n}{k} + O(1),$$

откуда нетрудно получить (2).

Если $k \geqslant n/2$, то аналогичными соображениями приходим к соотношениям

$$J_1 = \frac{1}{\pi^2}\ln(n-k) + O(1), \quad J_2 = \frac{2}{\pi^2}\ln\frac{n}{n-k} + O(1),$$

$$J_3 = \frac{1}{\pi^2}\ln[n^2(n-k)] + O(1),$$

из которых вытекает, что в этом случае

$$L_n(\alpha_n) = \frac{4}{\pi^2}\ln n = O(1),$$

что также согласуется с (2).

Аналогичными рассуждениями можно также получить асимптотические выражения констант Лебега для симметрического метода Рогозинского и для соответствующих интерполяционных сумм.

Днепровский
государственный университет

Поступило
17 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, C. R., 191, 976 (1930). [2] W. Rogosinski, Math. Ann., 95, 110 (1925). [3] А. Ф. Тиман, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, № 3, 263 (1947).