Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

МАТЕМАТИКА

А. Н. ТВЕРИТИН

ОДНО ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ МОМЕНТОВ В ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VI 1948)

Пусть дана последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, для которой выполнены условия „абсолютной монотонности"

$$\text{все } \Delta_k a_n \geqslant 0 \qquad (n=1, 2, \ldots; \ k=0, 1, \ldots). \tag{A}$$

Выполнение условий (A) является необходимым и достаточным для существования в $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ неубывающей функции моментов $\sigma(\rho)$, для которой

$$a_n = \int_0^1 \rho^{n-1}\, d\sigma(\rho). \tag{1}$$

Наложим теперь на последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ дополнительное условие

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{B}$$

и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx). \tag{2}$$

Целью автора в этой заметке является вывод формулы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = \int_0^1 \frac{\sin x \, d\sigma(\rho)}{\rho^2 - 2\rho\cos x + 1}, \tag{3}$$

имеющей место всегда, когда выполнены все условия (A) и условие (B); здесь $\sigma(\rho)$ — указанная выше функция моментов.

Непосредственное происхождение формулы (3) почти очевидно. Возьмем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} \sin(nx) = \frac{\sin x}{\rho^2 - 2\rho\cos x + 1}, \tag{4}$$

где $0 \leqslant \rho < 1$, умножим все члены на $d\sigma(\rho)$ и проинтегрируем в пределах от $\rho=0$ до $\rho=1$, считая, что почленное интегрирование допустимо. Используя теперь формулы (1), приходим к формуле (3).

Если $0 \leqslant \rho < 1$, то ряд (4) является рядом Фурье своей суммы, и поэтому имеют место формулы

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x \sin(nx)\, dx}{\rho^2 - 2\rho\cos x + 1} = \rho^{n-1}. \tag{5}$$

Обоснование формулы (3). Обозначим сумму ряда (2), сходящегося в наших условиях везде $(-\infty < x < +\infty)$ (([2]), гл. I, стр. 9), через $f(x)$, а интеграл, стоящий в правой части формулы (3), через $F(x)$. Нужно установить, что $f(x)=F(x)$.

Без труда одно за другим устанавливаются следующие свойства функции $F(x)$:

1) $F(x)$ имеет смысл при всяком x.

2) $F(x)$ есть непрерывная функция x при всяком x, исключая только точки $x_m=2\pi m$, где m целое, в которых возможен разрыв (могущий быть и бесконечным).

3) Если $x \neq 2\pi m$, то $F(x)$ обладает производными всех порядков; все эти производные можно получить, выполняя формальное дифференцирование по x под знаком интеграла.

4) Функции $\psi_n(x)=F(x)\sin nx$ остаются ограниченными и при $x \to 2\pi m$.

Свойство 4) обеспечивает, в частности, существование всех интегралов $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi F(x)\sin(nx)\,dx$, каждый из которых можно записать как повторный

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left[\int\limits_0^1 \frac{\sin x \sin(nx)\, d\sigma(\rho)}{\rho^2-2\rho\cos x+1}\right] dx. \tag{6}$$

Установим, что повторный интеграл (6) равен повторному интегралу

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^\pi \frac{\sin x \sin(nx)\, dx}{\rho^2-2\rho\cos x+1}\right] d\sigma(\rho), \tag{7}$$

равному a_n, что сразу следует из (5) и (1).

С этой целью разобьем промежуток интегрирования по x на два: $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ и $\varepsilon \leqslant x \leqslant \pi$ и представим разность интегралов (6) и (7) в виде

$$J_1+J_2+J_3+J_4,$$

где J_1 и J_3 соответствуют по отношению к x промежутку от ε до π, а J_2 и J_4 — промежутку от 0 до ε.

Интегралы J_2 и J_4 при достаточно малом ε могут быть сделаны сколь угодно малыми; что же касается J_1 и J_3, то, применяя известным образом интегрирование по частям, мы можем их привести к виду:

$$J_1=\frac{2}{\pi}\int\limits_\varepsilon^\pi [\varphi(x,1)\sigma(1)-\varphi(x,0)\sigma(0)]\,dx-\frac{2}{\pi}\int\limits_\varepsilon^\pi\int\limits_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\sigma(\rho)\,d\rho\,dx,$$

$$J_3=\frac{2}{\pi}\int\limits_\varepsilon^\pi [\varphi(x,1)\sigma(1)-\varphi(x,0)\sigma(0)]\,dx-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_\varepsilon^\pi \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\sigma(\rho)\,dx\,d\rho,$$

где $\varphi(x,\rho)$ — подъинтегральная функция (6) и (7).

Остается установить равенство повторных интегралов, стоящих в правых частях последних равенств. Но в случае этих последних интегралов мы имеем право применить теорему Фубини.

Итак, мы имеем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx = a_n. \tag{8}$$

Если интеграл

$$\int_0^{\pi} |F(x)|\,dx \tag{9}$$

конечен, то верность формулы (3) обосновывается теперь без труда.

Но в общем случае интеграл (9) может быть бесконечным (([2]), гл. V, стр. 115), и поэтому приходится избрать более сложный способ доказательства, не требующий конечности (9). А именно, фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим вспомогательную функцию $F_1(x, \varepsilon)$, определенную так:

$F_1(x, \varepsilon) = 0$, если $0 \leqslant x < \varepsilon$; $F_1(x, \varepsilon) = F(x)$, если $\varepsilon < x \leqslant \pi$;

$$F_1(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{2}F(\varepsilon).$$

Эта функция имеет систему обобщенных коэффициентов Фурье, соответствующих системе $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin(nx)$, ... в промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и равных

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} F(x)\sin(nx)\,dx. \tag{10}$$

Продолжим функции $F_1(x, \varepsilon)$ в промежуток $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ нечетным образом. Продолженная функция $F_1(x, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ есть ряд Фурье функции $F_1(x, \varepsilon)$ в $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и сходится к $F_1(x, \varepsilon)$ во всех точках $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = F(x), \quad \text{если} \quad \varepsilon < x \leqslant \pi. \tag{11}$$

Считая теперь x фиксированным и лежащим между ε и π, рассмотрим разность между $f(x)$ и $F(x)$.

Приняв во внимание (8), (10) и (11), мы видим, что разность $f(x) - F(x)$ можно представить в виде

$$f(x) - F(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\varepsilon} F(\xi)\sin(n\xi)\,d\xi\,\sin(nx).$$

Для установления равенства нулю суммы последнего ряда рассмотрим частную сумму его n первых членов. После некоторых преобразований эту частную сумму можно привести к виду

$$\frac{1}{\pi}\sin(nx)\int_0^{\varepsilon} F(\xi)\frac{\sin(n+1)\xi}{\cos\xi - \cos x}\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin(n+1)\,x\int_0^{\varepsilon} F(\xi)\frac{\sin(n\xi)}{\cos\xi - \cos x}\,d\xi.$$

Из последней записи видно, что достаточно показать, что интеграл $\int\limits_0^{\varepsilon} F(\xi)\frac{\sin(n\xi)\,d\xi}{\cos\xi-\cos x}$ сходится к нулю при $n\to\infty$ $(\varepsilon<x\leqslant\pi)$.

Последний интеграл легко преобразуется в

$$\frac{2}{1-\cos x}\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{F(\xi)[\sin(\xi/2)]^2}{\cos\xi-\cos x}\sin(n\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{1-\cos x}\int\limits_0^{\varepsilon}F(\xi)\sin(n\xi)\,d\xi.$$

Первый интеграл сходится к нулю при $n\to\infty$, так как $\frac{F(\xi)[\sin(\xi/2)]^2}{\cos\xi-\cos x}$ непрерывна в точке $\xi=0$ (ибо $F(\xi)\sin\xi$ ограничена); интеграл же второго слагаемого равен $\frac{\pi}{2}(a_n-b_n)$ и, следовательно, также сходится к нулю, так как b_n сходится к нулю вследствие непрерывности $F(\xi)$ в $\varepsilon\leqslant x\leqslant\pi$, а a_n сходится к нулю по условию (B).

Итак, установлено, что $F(x)=f(x)$, если $\varepsilon<x\leqslant\pi$. Но ε можно взять сколь угодно малым; равенство $F(0)=f(0)=0$ очевидно.

Итак, окончательно, при соблюдении условий (A) и (B) всегда

$$f(x)\equiv F(x),$$

и формула (3) строго обоснована.

Полученные результаты немедленно переносятся на более общий случай, когда последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ представляет собой разность двух абсолютно монотонных последовательностей и функция $\sigma(\rho)$ является, вообще говоря, произвольной функцией ограниченной вариации.

Автором получено обоснование также для случая формулы, соответствующей ряду с косинусами

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)=\int\limits_0^1\frac{(\cos x-\rho)\,d\sigma(\rho)}{\rho^2-2\rho\cos x+1} \qquad (12)$$

(свободный член опущен), имеющей место при выполнении тех же условий, что и в случае формулы (3). В случае формулы (12) функция $F_1(x)$, соответствующая интегралу правой части, всегда интегрируема. Однако само доказательство интегрируемости функции $F_1(x)$ является несколько кропотливым; кроме того, установление равенства повторных интегралов в случае формулы (12) является более громоздким, чем в случае (3).

Выведенные формулы (3) и (12), как представляется автору, могут иметь интерес при рассмотрении некоторых свойств функций — сумм рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$, для коэффициентов которых выполнены указанные условия.

Поступило
8 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Hausdorff, Math. Z., **9**, 74 (1921); **16**, 220 (1923). [2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939.