Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 4

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

НОВЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 VI 1948)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна между a и b вместе со своими m первыми производными. Пусть $P_m(x)$ обозначает полином степени m с коэффициентом при x^m, равным единице.

Обобщенная формула интегрирования по частям позволяет написать:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(-1)^\nu}{m!}\left[P_m^{(m-\nu)}(x) f^{(\nu-1)}(x)\right]_{x=a}^{x=b} + R_m, \qquad (1)$$

где

$$R_m = \frac{(-1)^m}{m!}\int_a^b P_m(x) f^{(m)}(x)\,dx.$$

Если коэффициент при старшей степени $P_m(x)$ отличен от 1, в формуле (1) следует $m!$ умножить на этот коэффициент.

Принцип, лежащий в основе вывода новых квадратурных формул, заключается в том, что строятся полиномы $P_m(x)$, принимающие вместе со своими производными (всеми или некоторыми) на конце (концах) промежутка интегрирования заданные значения. Такие полиномы $P_m(x)$ позволяют решать граничные проблемы для обыкновенных дифференциальных уравнений. Придавая m надлежащее значение, можно, вообще говоря, сделать R_m настолько малым, чтобы на практике его можно было откинуть. Это приведет нас к квадратурной формуле для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Принимая за $P_m(x)$ полином, сохраняющий знак в промежутке (a, b), сумеем упростить остаточный член R_m.

Остановимся сначала на вопросе построения квадратурных формул путем использования таких полиномов $P_m(x)$, для которых легко найти общее выражение $P_m^{(m-\nu)}(1)$ и $P_m^{(m-\nu)}(-1)$ или $P_m^{(m-\nu)}(0)$ в компактном виде. К числу таких полиномов относятся полиномы Чебышева, Бернулли и другие.

Примем

$$P_m(x) = T_m(x) + \frac{1}{2^{m-1}},$$

где $T_m(x)$ — полином Чебышева степени m, наименее уклоняющийся от нуля в промежутке $(-1, 1)$. Имеем

$$P_m(1) = \frac{1}{2^{m-2}}, \quad P_m(-1) = \frac{1+(-1)^m}{2^{m-1}}.$$

Используя дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Чебышева, мы убеждаемся в справедливости равенств:

$$P_m^{(m-\nu)}(-1) = (-1)^\nu P_m^{(m-\nu)}(1),$$

$$2^{m-1} P_m^{(m-\nu)}(1) = \frac{m^2}{1} \cdot \frac{m^2-1^2}{3} \cdots \frac{m^2-(m-\nu-1)^2}{2m-2\nu-1}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Пусть теперь $a = -1$, $b = 1$. Тогда формула (1) при m четном приводится к квадратурной формуле:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = f(1) + f(-1) + \sum_{\nu=2}^{m-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^\nu(\nu!)} \left\{\binom{2m-\nu-1}{\nu} \Big/ \binom{m-1}{\nu}\right\} \times$$

$$\times [f^{(\nu-1)}(1) + (-1)^{\nu-1} f^{(\nu-1)}(-1)] - \frac{f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(-1)}{2^{m-2}(m!)} +$$

$$+ \frac{m^2-2}{m^2-1} \frac{f^{(m)}(\xi)}{2^{m-2}(m!)} \quad (-1 < \xi < 1).$$

При m нечетном в полученной формуле должны быть вычеркнуты $f^{(m-1)}(-1)$ и $\frac{m^2-2}{m^2-1}$ и изменены знаки у $f^{(m-1)}(1)$ и $f^{(m)}(\xi)$ на обратные.

Полагая $a = 0$, $b = 1$, $m = 2n$,

$$P_m(x) = B_{2n}(x) - B_{2n}(0),$$

где $B_{2n}(x)$ — многочлен Бернулли степени $2n$, из формулы (1) получим, в частности, классическую формулу квадратур Эйлера — Маклорена.

Если заменить в (1) $P_m(x)$ через $(a-x)^n (b-x)^k$, то получим квадратурную формулу Н. Обрешкова ([1]), откуда, полагая $b = a + h$ и $k = n$, находим формулу Петра ([2]).

Выбирая, наконец, $P_m(x)$ должным образом, получим формулы Ковалевского ([3]).

Для примера рассмотрим интеграл:

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx = h\int_0^1 [f(a+th) + f(a-th)]\,dt.$$

Выпишем формулу (1) для функции $f(a+th) + f(a-th)$, положим $m = 3$ и $P_3(t)$ заменим на $t(1-t)^2$. Вычисляя, находим квадратурную формулу. Ее можно упростить с помощью подстановки $u = ht$.

Окончательно получается формула Симпсона с остаточным членом в форме Ковалевского (см. ([3]), стр. 49, форм. (11')):

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\{f(a-h) + 4f(a) + f(a+h)\} -$$

$$-\frac{1}{6}\int_0^h u(h-u)^2 \{f'''(a+u) - f'''(a-u)\}\,du.$$

Займемся теперь граничными задачами, в которых граничные условия относятся к двум конечным точкам промежутка $(0, l)$. Наиболее простым типом таких задач является граничная задача для дифференциального уравнения $y^{(n)}(x) = f(x)$. Это уравнение при $n = 2$ и 4 имеет ряд важных практических приложений в строительной механике.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)}(x) = \varphi(x)$$

с граничными условиями $y(0) = y(l) = 0$, $y''(0) = y''(l) = 0$.

Решение этого уравнения (непрерывное вместе с тремя первыми производными в промежутке $(0, l)$) будем искать с помощью формулы (1), в которой примем $m = 1$, $a = 0$, $b = l$, $P_1(x) = x - l$ и $f(x) = y'''(x)$. Получим:

$$y'''(0) = \frac{1}{l}\int_0^l (x - l)\, y^{(IV)}(x)\, dx.$$

Примем теперь $m = 3$, $a = 0$, $b = l$, $f(x) = y'(x)$. Построим полином $P_3(x)$, удовлетворяющий условиям: $P_3(0) = P_3(l) = 0$, $P_3''(l) = 0$. Вычисление показывает, что

$$P_3(x) = x(l - x)(x - 2l).$$

Следовательно,

$$y'(0) = -\frac{1}{6l}\int_0^l x(l - x)(x - 2l)\, y^{(IV)}(x)\, dx.$$

Используя формулу Маклорена, находим окончательно:

$$y(x) = \frac{1}{6l}\int_0^l K(x, t)\,\varphi(t)\, dt, \qquad (2)$$

где функция $K(x, t)$ определена следующим образом:

$$K(x, t) = l(x - t)^3 + x(t - l)(x^2 - 2lt + t^2) \quad \text{для } t \leqslant x,$$
$$K(x, t) = x(t - l)(x^2 - 2lt + t^2) \quad \text{для } t > x.$$

Рассмотрим теперь следующее дифференциальное уравнение:

$$y^{(IV)}(x) = \varphi(x) + a(x)\, y(x).$$

Граничные условия оставим прежними. Очевидно, что $y(x)$ будет удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма, получаемому из (2) путем замены $\varphi(t)$ на $\varphi(t) + a(t)\, y(t)$.

Что касается граничных проблем, для которых искомые решения приходится искать среди разрывных функций с разрывными производными (с конечным числом разрывов первого рода в промежутке $(0, l)$), то можно применить опять вышеизложенный прием. Для этого нужно только изменить формулу (1) соответствующим образом и построить формулу (2) с помощью формулы Маклорена, обобщенной автором в работе ([4]).

Поступило
25 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Obreschkoff, Math.-naturw. Abh., 4, 6 (1940). [2] K. Petr, Čas. pěst. Mat. Fys., 44, 454 (1915). [3] G. Kowalewski, Interpolazion und genäherte Quadratur, Leipzig u. Berlin, 1932. [4] Ш. Е. Микеладзе, ДАН, 52, № 9 (1946).