Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

МАТЕМАТИКА

С. Н. МЕРГЕЛЯН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ В СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 18 VI 1948)

Пусть D_1 и D_2 — две односвязные области, границы которых одновременно являются полными границами дополнений к соответствующим областям, а $f_i(z)$ регулярна в D_i и непрерывна в $\overline{D_i}$ $(i=1, 2)$. Через $\rho(n)$ мы обозначим нижнюю грань чисел

$$\max_{\substack{z\in \overline{D}_i \\ i=1,\,2}} |f_i(z)-P_n(z)|$$

по всевозможным полиномам степени n.

Пусть $z=0$ является единственной общей точкой областей D_1 и D_2, причем $f_1(0)=f_2(0)$. В этом случае известно ([1], [2]), что $\rho(n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Через B_i обозначим подобласть D_i, для которой отношение расстояния какой-либо точки $\overline{B_i}$ до $z=0$ к расстоянию той же точки до границы D_i равномерно ограничено сверху.

Скорость убывания чисел $\rho(n)$ зависит ([3]) как от свойств функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ и областей D_1, D_2, так и от третьего фактора — взаимного расположения областей. Ниже мы приводим результаты, относящиеся к изучению влияния той или иной конфигурации областей D_1, D_2 на возможную скорость приближения, при определенных предположениях относительно свойств каждой из областей D_1, D_2 и поведения $f_1(z)$, $f_2(z)$ на их границах.

Расстояние точки $z=0$ до линии уровня L_R $(R>1)$ дополнения к $\overline{D_1}+\overline{D_2}$ обозначим $d(R)$. Пусть $D=D_1+D_2$. Под $f(z)$, определенной в $\overline{D}$, будем понимать в области D_1 функцию $f_1(z)$, а в D_2 $f_2(z)$.

Теорема 1. *Если D_1 и D_2 выпуклы и $\omega(\delta)$ означает модуль непрерывности k-й производной функции $f(z)$ в $\overline{D}$, то*

$$\rho(n)<\text{const}\left[d\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)\right]^k\omega\left[d\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)\right].$$

Предположим, что граница D_1 вблизи $z=0$ определяется из уравнения

$$y=\varphi(x)=\varphi(-x),\qquad |x|<a,$$

а граница D_2 — из уравнения

$$y=-\varphi(x),\qquad |x|<a,$$

где $\varphi(x)$ монотонно убывает к нулю вместе с $|x|$.

Если на стыке областей D_1 и D_2 имеется угол, т. е.

$$\varphi(x)=q\,|x|, \qquad q>0,$$

то из теоремы 1 легко заключить, что

$$\rho(n)<\text{const}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{k\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} q\right)}\omega\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} q}\right). \tag{1}$$

Если же в точке $z=0$ имеем алгебраический порядок соприкосновения границ D_1 и D_2, т. е.

$$c_1x^m<\varphi(x)<c_2x^m, \qquad m>1,$$

то, оценивая $d(R)$, имеем

$$\rho(n)<\text{const}\ \frac{1}{(\ln n)^{k/(m-1)}}\,\omega\left(\frac{1}{(\ln n)^{k/(m-1)}}\right). \tag{2}$$

Пусть полиномы $\{P_n(z)\}$ сходятся равномерно в $\overline{D_i}$ к функции $f_i(z)$ $(i=1, 2)$. Через $r_i(n)$ обозначим

$$\max_{z\in\overline{D_i}}|f_i(z)-P_n(z)|.$$

Теорема 2. *Пусть границы D_1 и D_2 касаются друг друга в общей точке $z=0$, причем*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln r_1(n)\,r_2(n)}{\ln d\left(1+\frac{1}{n}\right)}=A.$$

Тогда, при любом $\varepsilon>0$, $\left[\frac{A-\varepsilon}{2}\right]$-я производная $f(z)$ непрерывна в $\overline{B_1}+\overline{B_2}$ и удовлетворяет там условию Липшица порядка $\left\{\frac{A-\varepsilon}{2}\right\}$.

В частности, если

$$\varphi(x)=\text{const}\,|x|^m, \qquad m>1,$$

то из неравенства

$$\rho(n)<\frac{\text{const}}{(\ln n)^p}$$

следует, что $[p(m-1)-\varepsilon]$-я производная $f(z)$ удовлетворяет в $\overline{B_1}+\overline{B_2}$ условию Липшица порядка $\{p(m-1)-\varepsilon\}$.

В случае же

$$\varphi(x)=|x|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad 0<\varphi<\pi,$$

из

$$\rho(n)<\frac{\text{const}}{n^A}$$

следует, что $\left[\frac{\pi A}{\varphi}\right]$-я производная $f(z)$ удовлетворяет в $\overline{B_1}+\overline{B_2}$ условию Липшица порядка $\left\{\frac{\pi A}{\varphi}-\varepsilon\right\}$.

Из сравнения отмеченных выше частных случаев теоремы 1 и 2 следует, что оценка (1) близка к точной (возможное улучшение в ней заключается лишь в том, что дробь $\frac{\ln n}{n}$ может быть заменена дробью $\left.\frac{1}{n}\right)$, а в случае алгебраического порядка соприкосновения границ оценка (2) скорости приближения является вполне точной.

Следует отметить, что в случае соприкосновения границ D_1, D_2 скорость одновременного приближения ведет себя так же, как и в случае приближения в одной области с входящей точкой, в которой порядок соприкосновения двух дуг границы тот же, что и порядок соприкосновения границ D_1 и D_2.

Пусть полиномы $\{P_n(z)\}$ сходятся в $\overline{D}$ к $f(z)$, причем

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z) - P_n(z)| = r(n).$$

Теорема 3. *Если между скоростью сходимости последовательности полиномов $\{P_n(z)\}$ и порядком соприкосновения областей выполняется соотношение*

$$r(n) < e^{-e^{\frac{1}{d\left(1+\frac{1}{n}\right)}}},$$

то из сходимости $\{P_n(z)\}$ к нулю в D_1 следует, что $\{P_n(z)\}$ сходятся к нулю также в $\overline{D_2}$, т. е. функция, к которой $\{P_n(z)\}$ сходятся в $\overline{D_1}$, однозначно определяет ту функцию, к которой при этом $\{P_n(z)\}$ могут сходиться в $\overline{D_2}$ и которая является „квазианалитическим" продолжением $f_1(z)$ в D_2.

Поступило
18 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, Матем. сб., 16 (58), № 3 (1945). [2] А. Л. Шагинян, Изв. АН СССР, сер. матем., № 4—5 (1941). [3] С. Н. Мергелян, Доклады АН Арм. ССР, 6, № 4 (1947).