Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 4

МАТЕМАТИКА

АНАСТАСИЯ МАНДЗЮК

О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМ ПРЯМЫХ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 VI 1948)

В настоящей работе метод проектирования и сечений применяется для построения в S_n различных систем прямых, которые можно рассматривать как аналоги обычного тетраэдрального комплекса.

Определение. Будем говорить, что k биоплоскостей S'_{n-1}, $S''_{n-1}, \ldots, S^{(k)}_{n-1}$ пространства S_{n+1} составляют приведенную систему, если они лежат соответственно в гиперплоскостях $S'_n, S''_n, \ldots, S^{(k)}_n$, принадлежащих одному и тому же пучку Г.

Теорема 1. *k биоплоскостей $S'_{n-1}, S''_{n-1}, \ldots, S^{(k)}_{n-1}$ пространства S_{n+1} составляют приведенную систему, если существует такая биоплоскость S_{n-1}, которая пересекает данные по пространствам $n-2$ измерений.*

Доказательство. Пусть S_{n-1} пересекает $S'_{n-1}, S''_{n-1}, \ldots$ $\ldots, S^{(k)}_{n-1}$, соответственно, по $S'_{n-2}, S''_{n-2}, \ldots, S^{(k)}_{n-2}$.

Если даны два пространства S_{n-1} и S'_{n-1}, то, как известно, сумма измерений двух данных пространств равна сумме измерений пространства связывающего и пространства пересечения и, так как $n-1+n-1=n+n-2$, то это означает, что $S'_{n-1}, S''_{n-1}, \ldots, S^{(k)}_{n-1}$ лежат, соответственно, в гиперплоскостях $S'_n, S''_n, \ldots, S^{(k)}_n$, образующих пучок Г с осью S_{n-1}, что и доказывает теорему.

Следствие. *Три произвольные плоскости S'_2, S''_2, S'''_2 четырехмерного пространства образуют приведенную систему.*

Доказательство. В самом деле, в данном случае осью пучка Г трехмерных пространств, в которых лежат, соответственно, S'_2, S''_2, S'''_2, будет плоскость S_2, соединяющая попарные точки пересечения S'_2, S''_2, S'''_2 четырехмерного пространства, так как S_2 пересекает данные по прямым линиям.

Теорема 2. *Если из произвольной точки O пространства S_{n+1} спроектировать в S_n все прямые, пересекающие одновременно биоплоскости $S'_{n-1}, S''_{n-1}, \ldots, S^{(k)}_{n-1}$, составляющие приведенную систему, то в S_n мы получим ∞^{2n-k} прямых, $3 \leqslant k < 2n$, пересекающих $k+1$ гиперплоскостей пространства S_n в проективных рядах точек.*

Доказательство. $k+1$ гиперплоскостей $OS_{n-1}, OS'_{n-1}, \ldots$ $\ldots, OS^{(k)}_{n-1}$ пространства S_{n+1}, соединяющие O с биоплоскостями S_{n-1} (ось пучка Г), $S'_{n-1}, S''_{n-1}, \ldots, S^{(k)}_{n-1}$, пересекут S_n в $k+1$ гиперплоскостях $\overline{S_{n-1}}, \overline{S'_{n-1}}, \ldots, \overline{S^{(k)}_{n-1}}$ пространства S_n.

2

Из определения же приведенной системы непосредственно вытекает, что ряд точек $A, A', A'', \ldots, A^{(k)}$ пересечения прямой l с OS_{n-1}, S'_{n-1}, $S''_{n-1}, \ldots, S^{(k)}_{n-1}$ перспективен ряду $k+1$ гиперплоскостей OS_{n-1}, S'_n, $S''_n, \ldots, S^{(k)}_n$ пучка Г. А это означает, что все $\infty^{n-1} \cdot \infty^{n-k+1} = \infty^{2n-k}$ прямых l, одновременно пересекающие S'_{n-1}, $S''_{n-1}, \ldots, S^{(k)}_{n-1}$, спроектируются из O в ∞^{2n-k} прямых $\bar{l}$ пространства S_n, пересекающих $k+1$ гиперплоскостей пространства S_n в проективных рядах точек, что и доказывает теорему.

Если условиться совокупность прямых $\bar{l}$, определяемую теоремой 2, обозначать символом $\sum\limits_n^k$, то $\sum\limits_3^3$ будет обозначать обыкновенный тетраедральный комплекс, а потому, полагая в теореме 2 $n = k = 3$ и принимая во внимание следствие теоремы 1, мы получаем известную теорему Коррадо Сегре (1), которая является, таким образом, лишь весьма частным случаем теоремы 2.

Обратив построения, применяемые нами при доказательстве теоремы 2, легко доказать, что система $\sum\limits_n^k$ состоит из всех прямых, пересекающих $k+1$ произвольных гиперплоскостей пространства S_n в $k+1$ точках, проективных заданному ряду из $k+1$ точек прямой линии.

Если положить $n = 3$ и $k = 3$, то приведенное выше определение системы $\sum\limits_n^k$ будет обычным определением тетраедрального комплекса, что дает повод рассматривать $\sum\limits_n^k$ как аналог тетраедрального комплекса.

Нужно заметить, однако, что наиболее полным аналогом $\sum\limits_3^3$ будет система $\sum\limits_n^n$, что подтверждается и следующими теоремами.

Теорема 3. *Система* $\sum\limits_n^n$ *содержит* $n+1$ *связок лучей, по* ∞^{n-1} *лучей в каждой связке.*

Доказательство. n из $n+1$ гиперплоскостей OS_{n-1}, OS'_{n-1}, $OS''_{n-1}, \ldots, OS^{(n)}_{n-1}$ (мы сохраняем обозначения, применяемые нами при доказательстве теоремы 2) пересекаются по прямой, встречающей S_n в одной точке M.

Ясно, что любая прямая пространства S_n, проходящая через любую из $n+1$ возможных здесь точек M, будет принадлежать системе $\sum\limits_n^n$, что и доказывает теорему.

Теорема 4. *Через произвольную точку X пространства S_n проходит ∞^1 лучей системы* $\sum\limits_n^n$, *образующих нормальный конус $(n-1)$-го порядка.*

Доказательство. Если луч $\bar{l}$ (мы сохраняем прежние обозначения) системы $\sum\limits_n^n$ проходит через точку X, то он является проекцией луча l пространства S_{n+1}, пересекающего как n биоплоскостей S'_{n-1}, $S''_{n-1}, \ldots, S^{(n)}_{n-1}$, так и прямую OX.

Но прямые l, пересекающие одновременно S'_{n-1}, $S''_{n-1}, \ldots$ $\ldots, S^{(n)}_{n-1}$ и прямую OX, образуют в S_{n+1}, как это легко сообразить, нормальную линейчатую поверхность n-го порядка, которая пересекается пространством S_n по нормальной кривой C^n, проходящей через точку X.

Кривая же C^n из ее точки X проектируется нормальным конусом $(n-1)$-го порядка, что и доказывает теорему.

Если мы из точки O пространства S_{n+1} спроектируем в S_n ∞^{2n-n} прямых, пересекающих уже не приведенную, а произвольную систему, состоящую из n биоплоскостей пространства S_{n+1}, то мы получим в S_n новую систему $\overset{\bar{n}}{\underset{n}{\Sigma}}$ прямых, более общую, чем система $\overset{n}{\underset{n}{\Sigma}}$.

Ясно, что не все теоремы, справедливые для $\overset{n}{\underset{n}{\Sigma}}$, будут справедливы и для $\overset{\bar{n}}{\underset{n}{\Sigma}}$, но, например, теорема 4 будет иметь место и для $\overset{\bar{n}}{\underset{n}{\Sigma}}$.

В S_4 три произвольных S_2 образуют приведенную систему, что не имеет места для n произвольных S_{n-1} пространства S_{n+1}, а потому в S_n мы можем, в отличие от S_3, указанным выше способом, кроме $\overset{n}{\underset{n}{\Sigma}}$, получить и другие различные частные виды системы $\overset{\bar{n}}{\underset{n}{\Sigma}}$, с присущими именно этим видам особенностями.

Поступило
12 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Segre, Mehrdimensionale Räume, Enzyklop. d. math. Wissensch., III, 2, 7, 1921, p. 794; Rend. Circ. mat. Palermo, 2, 45 (1888).