Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 VI 1948)

Введя обозначения: M_ρ — класс целых функций порядков $\leqslant \rho$, $0<\rho<\infty$; $f(\mu_n)$ — показатель сходимости последовательности чисел $\{\mu_n\}$; $q_1 = f(q, \mu_n)$ — такое целое число, что при нецелом q $q_1 < q < q_1+1$, а при целом q $q_1+1=q$ или $q_1=q$, в зависимости от того, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^{-q}$ или нет;

$$f(z, h, k, \mu_n) = e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{\mu_n}\right) e^{\frac{z}{\mu_n}+\ldots+\frac{z^k}{k\mu_n^k}},$$

мы установим в настоящей статье следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots$, — *последовательность точек в плоскости* z. *Тогда для того, чтобы при любой системе чисел* $\{a_n\}$ *такой, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln|a_n|}{\ln|\lambda_n|} \leqslant \rho, \qquad 0<\rho<\infty, \tag{1}$$

существовала бы хоть одна функция $\omega(z) \in M_\rho$ *со свойством* $\omega(\lambda_n) = a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяла условиям:*

A. $f(\lambda_n) \leqslant \rho$, *т. е. при любом* $\varepsilon > 0$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-\rho-\varepsilon} < \infty$.

B. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{\ln|\lambda_n|} \ln\ln\left|\dfrac{1}{F'(\lambda_n)}\right| \leqslant \rho$,

где $F(z) = f(z, 0, k, \lambda_n)$, $k = f(\rho, \lambda_n)$.

При доказательстве этой теоремы будем опираться на следующий известный (см., например, [1]) факт:

C. Если целая функция $\varphi(z)$ имеет порядок ω, последовательность $\{\mu_n\}$ ее нулей имеет показатель сходимости σ, то тогда $\varphi(z) = f(z, h, k, \mu_n)$, где $k = f(\sigma, \mu_n)$, $h(z)$ — полином степени $\bar{h}$, причем $\omega = \max(\bar{h}, \sigma)$. Обратно, если степень полинома $h(z)$ есть $\bar{h}$, $f(\mu_n) = \sigma$, то тогда целая функция $f(z, h, k, \mu_n)$, где $k = f(\sigma, \mu_n)$, имеет порядок $\omega = \max(\bar{h}, \sigma)$.

Установим сперва необходимость условий A и B. Для этого допустим, что для любой системы чисел $\{a_n\}$ со свойством (1) найдется хоть одна такая функция $\omega(z) \in M_\rho$, что $\omega(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В частности, пусть функция $\omega_1(z) \in M_\rho$ будет такой, что $\omega_1(\lambda_1) = 1$, $\omega_1(\lambda_n) = 0$ при $n \geqslant 2$.

Тогда, согласно C, последовательность $\{\mu_n\}$ нулей $\omega_1(z)$ будет иметь показатель сходимости $\leqslant \rho$, и, следовательно, условие A, поскольку при $n \geqslant 2$ $\lambda_n \subset \{\mu_j\}$, будет выполнено.

Если положить $f(\lambda_n) = \sigma_1$, то отсюда следует, что $k_1 = f(\sigma_1, \lambda_n) \leqslant \leqslant f(\rho, \lambda_n) = k$, и $F(z) = f(z, 0, k_1, \lambda_n) \exp(g_{k_1+1} z^{k_1+1} + \ldots + g_k z^k)$, $g_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-j}$, будет принадлежать классу M_ρ.

Желая вывести условие B, мы предположим, от противного, что оно не выполняется. Из этого будет вытекать, что найдутся такое число $\rho_1 > \rho$ и последовательность $\{\nu_n\} \subset \{\lambda_n\}$, что будем иметь:

$$\text{D.}\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln |\nu_n|} \ln \ln \left| \frac{1}{F'(\nu_n)} \right| = \rho_1 > \rho, \quad |\nu_{n+1}| \geqslant 2 |\nu_n|, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть функция $\omega_2(z) \in M_\rho$ будет такой, что $\omega_2(\nu_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\omega_2(\lambda_n) = 0$ при всех $\lambda_n \,\overline{\subset}\, \{\nu_j\}$. Обозначив через $\{\mu_n'\}$ последовательность нулей $\omega_2(z)$, мы будем иметь, в силу C, что $\sigma_2 = f(\mu_n') \leqslant \rho$ и $\omega_2(z) = f(z, h, k_2, \mu_n')$, где $k_2 = f(\sigma_2, \mu_n')$ и $h(z)$ — полином степени $\leqslant \rho$. Полагая $p = \max(k, k_2)$, мы получим $F(z) = f(z, h_1, p, \lambda_n)$, $\omega_2(z) = = f(z, h_2, p, \mu_n')$, причем степени полиномов $h_1(z)$ и $h_2(z)$ будут $\leqslant \rho$. Поэтому

$$\frac{\omega_2(z)}{F(z)} = \frac{f(z, h_3, p, \mu_n'')}{f(z, 0, 0, \nu_n)}, \tag{2}$$

где, поскольку $h_3(z)$ — полином степени $\leqslant \rho$, $\{\mu_n''\} \subset \{\mu_n'\}$, функция $f(z, h_3, p, \mu_n'') \in M_\rho$. Так как $f'(\nu_n, 0, 0, \nu_n) = -\frac{1}{\nu_n} \prod\limits_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\nu_n}{\nu_j}\right) \prod\limits_{j=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\nu_n}{\nu_j}\right)$

и, следовательно, в силу D, $|f'(\nu_n, 0, 0, \nu_n)| \geqslant \frac{1}{|\nu_n|} \prod\limits_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{c}{|\nu_n|}$, то, учитывая равенство $\omega_2(\nu_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, получим из (2), что

$$\frac{1}{F'(\nu_n)} = \frac{f(\nu_n, h_3, p, \mu_n'')}{f'(\nu_n, 0, 0, \nu_n)}, \quad \left| \frac{1}{F'(\nu_n)} \right| \leqslant \frac{1}{c} |\nu_n f(\nu_n, h_3, p, \mu_n'')|.$$

Последнее неравенство находится в противоречии с D, и, следовательно, условие B этим самым установлено.

Докажем теперь достаточность условий A и B. Для этого предположим, что они выполнены. Рассмотрим систему чисел $\{a_n\}$ со свойством (1). Положив $|\lambda_n|^{\rho + \delta_n} = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и заметив, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, \delta_n \leqslant 0$, выберем числа $\varepsilon_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы выполнялись условия: $\varepsilon_n \geqslant \delta_n$, $\left| \frac{a_n}{F'(\lambda_n)} \right| \leqslant \exp |\lambda_n|^{\rho + \varepsilon_n}$, числа $s_n = |\lambda_n|^{\rho + \varepsilon_n}$ целые, $s_{n+1} \geqslant s_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Покажем, что функция

$$\omega(z) = F(z) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z), \qquad P_n(z) = \frac{a_n}{F'(\lambda_n)} \left(\frac{1}{z - \lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} + \ldots + \frac{z^{s_n - 1}}{\lambda_n^{s_n}} \right)$$

принадлежит классу M_ρ и обладает свойством: $\omega(\lambda_n)=a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Пусть $N=N(r)$ — наименьшее целое число, при котором $|\lambda_N|\geqslant er$. Заметив, что $P_n(z)=\frac{a_n}{F'(\lambda_n)}\frac{1}{z-\lambda_n}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{s_n}$, мы будем иметь:

$$J_1=\left|\sum_N^\infty P_n(z)_{|z|=r}\right|\leqslant\sum_N^\infty e^{s_n}\left|\frac{r}{\lambda_n}\right|^{s_n}=\sum_N^\infty\left|\frac{er}{\lambda_n}\right|^{s_n},$$

или, поскольку $\left|\frac{er}{\lambda_n}\right|\leqslant 1$ при $n\geqslant N$ и $s_n=n^{\frac{\rho+\varepsilon_n}{\rho+\delta_n}}\geqslant n$,

$$J_1\leqslant\sum_N^\infty\left|\frac{e_r}{\lambda_n}\right|^n=\sum_N^\infty\left(\frac{er}{n^{\frac{1}{\rho+\delta_n}}}\right)^n.$$

Полагая $\mu=\mu(r)=\max\limits_{n\geqslant N(r)}\delta_n$, $q=(er)^{\rho+\mu}$, мы окончательно получим:

$$J_1\leqslant\sum_1^\infty\left(\frac{er}{n^{\frac{1}{\rho+\mu}}}\right)^n=\sum_N^\infty\left(\frac{q^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{\rho+\mu}}<\sum_1^\infty\left(\frac{q^n}{n!}\right)^{\frac{1}{\rho+\mu}}<$$

$$<\left(\sum_1^\infty\frac{q^n}{n!}\right)^{\frac{1}{\rho+\mu}}=\exp\frac{q}{\rho+\mu}=\exp\frac{(er)^{\rho+\mu}}{\rho+\mu}=\exp r^{\rho+\mu'(r)}, \tag{3}$$

где, так как $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\,\mu(r)\leqslant 0$, $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\,\mu'(r)\leqslant 0$.

Далее, пусть число n_0 таково, что $|\lambda_{n_0}|\geqslant 1$. Так как $s_{n+1}\geqslant s_n$ и так как при любом $\varepsilon>0$, когда $r>r_0(\varepsilon)$, имеем при всяком n равномерно неравенство* $\left|\frac{F(z)}{z-\lambda_n}\right|<\exp r^{\rho+\varepsilon}$, то при $r>r_0(\varepsilon)\geqslant 1$

$$J_2=\left|F(z)\sum_{n_0}^{N-1}P_n(z)_{|z|=r}\right|=\left|\sum_{n_0}^{N-1}\frac{F(z)}{z-\lambda_n}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{s_n}\right|<(N-1)\,r^{s_{N-1}}\exp r^{\rho+\varepsilon}.$$

Из неравенств $|\lambda_{N-1}|<er$ легко получаем, что

$$N-1<(er)^{\rho+\delta_{N-1}},\quad s_{N-1}=|\lambda_{N-1}|^{\rho+\varepsilon_{N-1}}.$$

Поэтому

$$J_2=\exp r^{\rho+\mu''(r)},\quad\text{где}\quad\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\mu''(r)\leqslant 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (3), и следует, что $\omega(z)\in M_\rho$. То, что удовлетворяется условие $\omega(\lambda_n)=a_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, очевидно.

Поступило
16 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Ингам, Распределение простых чисел, 1936.

* Оно следует из доказательства утверждения С.