Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

А. ПОВЗНЕР

О ПЛОТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ $e^{i\lambda_n t}$ в $L^2(-\pi, \pi)$

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 18 XI 1948)

Задаче нахождения достаточных условий для того, чтобы последовательность функций $e^{i\lambda_n t}$ $(-\infty < n < \infty)$ была плотна в $L^2(-\pi,\pi)$, посвящен ряд работ. Наиболее общие, насколько известно автору, условия для случая действительных λ_n принадлежат N. Levinson'у ([1]).

Целью настоящей заметки является получение элементарным способом достаточных условий для плотности, годных для комплексных λ_n и включающих условия N. Levinson'a как частный случай.

Разложим $e^{i\lambda_n t}$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$

$$e^{i\lambda_n t} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n - k)\pi}{\lambda_n - k} e^{ikt}. \tag{1}$$

Пусть λ не совпадает ни с одним λ_n и подберем коэффициенты p_s так, чтобы в разложении $e^{i\lambda t} - \sum_{s=-n}^{n} p_s e^{i\lambda_s t}$ в ряд Фурье отсутствовали коэффициенты при e^{ikt} $(k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$.

Положим при так подобранных p_s

$$e^{i\lambda t} - \sum_{-n}^{n} p_s e^{i\lambda_s t} = \sum_{k=\pm(n+1), \pm(n+2), \ldots} q_{k,n}(\lambda) e^{ikt}. \tag{2}$$

Ясно, что для плотности $e^{i\lambda_n t}$ в $L^2(-\pi, \pi)$ достаточно, чтобы для любого λ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=\pm(n+1), \pm(n+2),\ldots} |q_{k,n}(\lambda)|^2 = 0$$

(нетрудно видеть, что достаточно, чтобы это было справедливо только для одного значения λ, отличного от всех λ_n).

Для определения p_s в (2) получаем систему уравнений:

$$\sum_{s=-n}^{n} \frac{\sin \pi\lambda_s}{\lambda_s + k} p_s = \frac{\sin \pi\lambda}{\lambda + k}, \quad k = -n, \ldots, n. \tag{3}$$

Отсюда

$$\frac{\sin \pi\lambda_s}{\sin \pi\lambda} p_s = \frac{\omega_n(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)\,\omega_n'(\lambda_s)} \frac{\varphi_n(\lambda_s)}{\varphi_n(\lambda)}, \tag{4}$$

где положено $\omega_n(t) = \prod\limits_{p=-n}^{n} (t-\lambda_p), \quad \varphi_n(t) = \prod\limits_{p=-n}^{n} (t-p).$

Далее

$$q_{k,n}(\lambda) = \frac{1}{\pi}(-1)^k \left\{ \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda - k} - \sum_{s=-n}^{n} p_s \frac{\sin \pi\lambda_s}{\lambda_s - k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}(-1)^k \sin \lambda\pi \left\{ \frac{1}{\lambda-k} - \sum_{s=-n}^{n} \frac{1}{\lambda_s - k} \frac{\omega_n(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)\,\omega_n'(\lambda_s)} \frac{\varphi_n(\lambda_s)}{\varphi_n(\lambda)} \right\} \tag{5}$$

$$k = \pm(n+1),\ \pm(n+2), \ldots$$

Выражение в фигурных скобках в (5) легко упрощается, если рассмотреть $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi_n(z)}{(z-k)\,\omega_n(z)\,(z-\lambda)}\,dz$, где контуром C служит окружность с центром в нуле, содержащая внутри все полюсы подинтегральной функции.

Так как степень знаменателя на 2 больше степени числителя, то рассматриваемый интеграл равен нулю. С другой стороны, теорема о вычетах дает:

$$\frac{\varphi_n(\lambda)}{(\lambda-k)\,\omega_n(\lambda)} + \sum_{s=-n}^{n} \frac{\varphi_n(\lambda_s)}{(\lambda_s-k)\,\omega_n'(\lambda_s)\,(\lambda_s-\lambda)} + \frac{\varphi_n(k)}{\omega_n(k)\,(k-\lambda)} = 0. \tag{6}$$

Отсюда и из (5)

$$q_{k,n}(\lambda) = \frac{1}{\pi}(-1)^k \sin \lambda\pi \frac{\omega_n(\lambda)}{\varphi_n(\lambda)} \frac{\varphi_n(k)}{\omega_n(k)\,(\lambda-k)}, \tag{7}$$

или

$$q_{k,n}(\lambda) = \frac{1}{\pi}(-1)^k \sin \lambda\pi \frac{k}{k-\lambda_0} \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda} \frac{1}{\lambda-k} \frac{\prod\limits_{s=1}^{n} \lambda_s \prod\limits_{s=-1}^{-n} \lambda_{-s}}{n!\; n!} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{s=-n}^{n}{}' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right)}{\prod\limits_{s=-n}^{n}{}' \left(1-\frac{\lambda}{s}\right) \prod\limits_{s=1}^{n}\left(1 - \frac{a_s}{k-s}\right) \prod\limits_{s=1}^{n}\left(1-\frac{b_s}{k+s}\right)}, \tag{8}$$

где $a_s = \lambda_s - s, \quad b_s = \lambda_{-s} + s.$

В дальнейшем все постоянные, зависящие только от λ, будут обозначаться через H.

Пусть

$$|\lambda_s - s| < h, \qquad s = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

Тогда бесконечное произведение $\prod_{s=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_s}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{-s}}\right)$ сходится, и из (8)

$$|q_{k,n}(\lambda)| \leqslant \frac{H}{|k|}\left|\frac{\prod_1^n \lambda_s}{n!}\right|\left|\frac{\prod_1^n \lambda_{-s}}{n!}\right| \frac{1}{\left|\prod_{s=1}^{n}\left(1-\frac{a_s}{k-s}\right)\right|\left|\prod_{s=1}^{n}\left(1-\frac{b_s}{k+s}\right)\right|}. \quad (10)$$

Пусть

$$a_s = \alpha_s + i\gamma_s, \quad b_s = \beta_s + i\delta_s, \quad \alpha > \overline{\lim}\,|\alpha_s|, \quad \overline{\lim}\,|\beta_s| < \alpha \quad (11')$$

и

$$\alpha < 1/2. \quad (11)$$

Тогда в $\prod_{s=1}^{n}\left(1-\frac{a_s}{k-s}\right)$

$$\left|\frac{a_s}{k-s}\right| < \frac{h}{h+1} \quad (12)$$

при $s \neq k-1,\ k-2, \ldots,\ k-(\mathrm{Ent}\,(h)+2)$.

Что касается не более чем $\mathrm{Ent}\,(h)+2$ значений s, для которых это неравенство не выполняется, то считая, что a_s не равно целому числу (что легко рассмотреть отдельно), и заметив, что в силу (11) $\left|1-\frac{a_s}{k-s}\right| \geqslant \frac{1}{4}$ для всех достаточно больших значений s, получим для достаточно больших n

$$\left|\frac{1}{\prod_{s=1}^{n}\left(1-\frac{a_s}{k-s}\right)}\right| \leqslant He^{\sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha_s}{k-s}}. \quad (13)$$

Точно так же

$$\left|\frac{1}{\prod_{s=1}^{n}\left(1-\frac{b_s}{k+s}\right)}\right| \leqslant He^{\sum_{s=1}^{n}\frac{\beta_s}{k+s}}. \quad (14)$$

Далее,

$$\left|\frac{\prod_1^n \lambda_s}{n!}\right| \leqslant He^{\sum_1^n \frac{\alpha_s}{s}}, \quad \left|\frac{\prod_1^n \lambda_{-s}}{n!}\right| \leqslant He^{-\sum_1^n \frac{\beta_s}{s}}. \quad (15)$$

Вставляя (13), (14), (15) в (10), получим

$$|q_{k,n}(\lambda)| \leqslant \frac{H}{|k|}\, e^{\sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha_s-\beta_s}{s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha_s}{k-s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\beta_s}{k+s}} \quad (16)$$

Но (α из (11')

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\alpha_s}{k-s}+\frac{\beta_s}{k+s}\right)\right| \leqslant \alpha\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{|k-s|}+\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{|k+s|}\right)+H=$$

$$=\alpha\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{|k|-s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{|k|+s}\right)+H\leqslant$$

$$\leqslant \alpha\int_0^n\frac{dt}{|k|-t}+\alpha\int_0^n\frac{dt}{|k|+t}+H. \tag{17}$$

Полагая $\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\left[\sum_{s=1}^{n}(\alpha_s-\beta_s)\right]<A$, получим с помощью преобразования Абеля:

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\alpha_s-\beta_s}{s}<A\sum_{1}^{n}\frac{1}{s}+H<A\ln n+H. \tag{18}$$

Вставляя (17) и (18) в (16), будем иметь:

$$|q_{k,n}(\lambda)|\leqslant\frac{H}{|k|}\left(\frac{|k|+n}{|k|-n}\right)n^A. \tag{19}$$

Таким образом,

$$I_n(\lambda)=\sum_{k=\pm(n+1),\,\pm(n+2),\ldots}|q_{k,n}(\lambda)|^2\leqslant H\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}n^{2A}\left(\frac{k+n}{k-n}\right)^{2\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant H\int_n^{\infty}\frac{n^{2A}}{t^2}\left(\frac{t+n}{t-n}\right)^{2\alpha}dt=H\frac{n^{2A}}{n}\int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{2\alpha}dt.$$

Интеграл сходится в силу (11), и если $A<\frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}I_n(\lambda)=0$.

Таким образом получаем:

Теорема 1. $e^{i\lambda_s t}$ *плотно в* $L^2(-\pi,\pi)$, *если*

1) $|\lambda_s-s|<h,\ s=\pm1,\ \pm2,\ldots;$

2) *полагая* $\alpha_s=\mathrm{Re}(\lambda_s-s)$, $\beta_s=\mathrm{Re}(\lambda_{-s}+s)$ $(s>0)$, $\alpha+\overline{\lim}\,|\alpha_s|$,

$\beta=\overline{\lim}\,|\beta_s|$, $A=\overline{\lim}\,\dfrac{\sum_{s=1}^{n}\alpha_s-\beta_s}{n}$, *имеет место*: $\alpha<1/2$, $\beta<1/2$, $A<1/2$.

В частном случае, если λ_s действительны и $h<1/4$, условие 2) удовлетворяется, что дает теорему N. Levinson'a ([1]).

Применение более тонких методов оценки $q_{k,n}(\lambda)$ в (7) дает дальнейшее уточнение результатов.

Поступило
18 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Levinson, Duke Math. J., 511 (1936).