Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 4

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

О КОЛЛИНЕАЦИЯХ ПРОСТРАНСТВ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 VI 1948)

Известно, что в многообразии $x^1, x^2, \ldots, x^n$ с заданным объектом перенесения $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, симметрическим по индексам β, γ, можно построить объект Thomas'а проективной связности

$$\Pi^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{2}{n+1}\,\delta^\alpha_{(\beta}\Gamma^\sigma_{\gamma)\sigma},$$

составляющие которого инвариантны при преобразовании объекта связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, не меняющем путей.

Преобразование, вызванное инфинитезимальным оператором

$$XF = p_\sigma v^\sigma,$$

где σ — индекс суммирования от 1 до n, $p_\sigma = \partial F / \partial x^\sigma$, $v^\sigma = v^\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, будет являться проективной коллинеацией, если оно пути переводит в пути, т. е.

$$\partial_{\beta\gamma} v^\alpha + v^\sigma \partial_\sigma \Pi^\alpha_{\beta\gamma} - \partial_\sigma v^\alpha \Pi^\sigma_{\beta\gamma} + \partial_\beta v^\sigma \Pi^\alpha_{\sigma\gamma} + \partial_\gamma v^\sigma \Pi^\alpha_{\beta\sigma} - \\ - \frac{2}{n+1}\,\delta^\alpha_{(\beta}\partial_{\gamma)\sigma} v^\sigma = 0. \tag{1}$$

Называя формально

$$u^\alpha_{|\beta} = \partial_\beta u^\alpha - \Pi^\alpha_{\beta\gamma} u^\gamma$$

проективной производной, уравнения (1) могут быть представлены в форме:

$$v^\alpha_{|\beta|\gamma} - v^\sigma B_{\beta\gamma\sigma} - \frac{2}{n+1}\, v^\sigma{}_{\sigma|(\beta}\delta^\alpha_{\gamma)} = D_L \Pi^\alpha_{\beta\gamma} = 0. \tag{2}$$

Знак D_L означает лиевое дифференцирование ([1]) в направлении v^σ, нетензорное выражение

$$\frac{1}{2} B^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_{[\gamma}\Pi^\alpha_{\delta]\beta} + \Pi^\sigma_{\beta[\delta}\Pi^\alpha_{\gamma]\sigma}.$$

Совокупность r линейно независимых операторов, каждый из которых определяет проективную коллинеацию для заданного пространства проективной связности и образующих группу Ли наибольшего порядка, будем называть полной группой проективных коллинеаций.

Операции лиевого и проективного дифференцирований в направлении поля v^{σ} коммутативны в силу (2). Условия интегрируемости относительно n^2+2n функций u^{α}_{β}, v^{α}, w_{α}, уравнений

$$v^{\alpha}_{|b}=u^{\alpha}_{\beta},$$

$$v^{\sigma}_{|\sigma|\alpha}=w_{\alpha}.$$

$$u^{\alpha}_{\beta|\gamma}-v^{\sigma}B^{\alpha}_{\beta\gamma\sigma}-\frac{2}{n+1}w_{(\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma)}=0,$$

эквивалентных уравнениям (2), будут иметь вид

$$1)\quad D_L W^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k+1)\ D_L W^{\alpha}_{\beta\gamma\delta|\varepsilon_1|\varepsilon_2|\ldots|\varepsilon_k}=0,$$

где $W^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ — тензор Вейля, $k=1, 2, \ldots, N$.

Но так как составляющие тензора $W^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, антисимметричные по индексам γ, δ, удовлетворяют тождеству Риччи ([2]) и укороченная матрица, составленная из коэффициентов при u^{α}_{β} первой серии условий интегрируемости совпадает с соответствующей матрицей для составляющих тензора кривизны аффинно-связного пространства, допускающего движения, то из результатов, полученных мной о порядке групп движений пространств аффинной связности ([3]), следует, что порядок полных групп проективных коллинеаций с отличным от нуля тензором Вейля не выше n^2+n.

Рассмотрение укороченной матрицы в предположении, что ее ранг меньше $n+1$, приводит к усилению этого результата.

а) Минор, построенный из строчек

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\mu\,\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\varepsilon_i\\ \alpha_2\alpha_3\alpha_4\end{pmatrix}\qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

и коэффициентов при неизвестных

$$u^{\alpha_3}_{\mu},\ u^{\varepsilon_j}_{\alpha_1}\qquad (j=1, 2, \ldots, n;\ \varepsilon_i\neq\varepsilon_j,\ \text{если}\ i\neq j),$$

где $\mu\neq\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, равен степени составляющей $W^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ $(\alpha_1\neq\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

b) Минор, построенный из строчек

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_i\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_j\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}\qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

и столбцов

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_i\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_2\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

где $\alpha_i\neq\alpha_3, \alpha_2$, дает

$$W^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}=0,$$

или постоянно будем иметь

$$W^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}-W^{\alpha_i}_{\alpha_3\alpha_i\alpha_3}=0.$$

Почленное сложение вторых равенств, получаемых при i, принимающем возможное значение, приводит к первым равенствам в силу того, что контрактирование тензора Вейля по верхнему и одному из нижних индексов дает тензора, равные нулю.

c) Если имеют место случаи a) и b), то из минора, отвечающего строчкам

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\alpha_1\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\alpha_4\alpha_3\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\alpha_n\alpha_3\end{pmatrix}$$

и столбцам

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_4\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

вытекает справедливость соотношений

$$W^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3} = W^{\alpha_2}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}.$$

d) При наличии отмеченных выше случаев из равенства нулю минора, отнесенного столбцам

$$\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_k\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\alpha_k\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_4\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_2\alpha_2\alpha_n\end{pmatrix}$$

и строчкам

$$\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_k\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_k\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

следует одно из соотношений для $k=1, 4, 5, \ldots, n$:

$$W^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_k}=0,\qquad W^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}=W^{\alpha_k}_{\alpha_k\alpha_2\alpha_3},\qquad W^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}=W^{\alpha_k}_{\alpha_k\alpha_2\alpha_3}+W^{\alpha_k}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_k}.$$

Заставляя здесь α_k принимать возможные значения от 1 до n (справедливость этого следует из замены каждый раз k-го столбца и строчки соответственно, например, на $\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\ 223\end{pmatrix}$, если $k \geqslant 4$) и суммируя получаемые соотношения почленно, получим, на основании замеченного выше свойства тензора Вейля и дополнительных рассмотрений, всегда

$$W^{\alpha_3}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_3}=0,\qquad W^{\alpha_1}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=0.$$

e) Отсюда следует, что равный нулю минор, составленный из строчек

$$\begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_4\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_n\alpha_1\alpha_2\end{pmatrix}$$

и столбцов

$$\begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_n\end{pmatrix},$$

дает

$$W^{\alpha_1}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_2}=0.$$

Итак, имеет место при $n \geqslant 3$ (ограничение на μ в случае a) можно ослабить):

Теорема. *Порядок полных групп проективных коллинеаций пространств проективной связности с отличным от нуля тензором Вейля меньше или равен* n^2+n-1.

Заметим, что полученные результаты автоматически распространяются на движения и проективные коллинеации пространств с объектами связности соответственно $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$, зависящими от точки и направления.

Поступило
10 II 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Л. Лаптев, Изв. Физ.-мат. об-ва при Казанск. ун-те, **10**, сер. 3 (1938). [2] L. Pf. Eisenhart, Non Riemannian Geometry, 1927. [3] И. П. Егоров, ДАН, **57**, № 9 (1947).