Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 VI 1948)

1°. С. Лефшец [1], применив известную теорему Броуэра о „неподвижной точке", получил достаточные условия существования периодического решения для некоторого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с периодической правой частью. В настоящей работе тем же методом получены аналогичные достаточные условия существования периодических решений для общей нелинейной системы 2-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых периодические функции относительно независимой переменной, допускающие общий период.

2°. Рассмотрим нелинейную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_{10}(t,x,y) + xf_{11}(t,x,y) + yf_{12}(t,x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_{20}(t,x,y) + xf_{21}(t,x,y) + yf_{22}(t,x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где:

I_1. Функции $f_{ij} = f_{ij}(t,x,y)$ $(i = 1, 2;\quad j = 0, 1, 2)$ вещественны, определены и непрерывны для всех действительных значений переменных t, x и y.

I_2. Функции $f_{i0} = f_{i0}(t,x,y)$ $(i = 1, 2)$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ имеют порядок роста ниже, чем r, а именно равномерно относительно совокупности переменных t, x и y выполнено условие:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{f_{i0}}{r} = 0.$$

I_3. Все функции f_{ij} $(i = 1, 2; j = 0, 1, 2)$ являются периодическими относительно переменной t, допускающими общий период T:

$$f_{ij}(t + T, x, y) \equiv f_{ij}(t, x, y).$$

I_4. Каковы бы ни были числа t_0, x_0 и y_0, решение

$$x = x(t; t_0, x_0, y_0),$$
$$y = y(t; t_0, x_0, y_0)$$

системы (1), определяемое начальными условиями: $x = x_0$, $y = y_0$ для $t = t_0$, существует при $-\infty < t < +\infty$ и единственно.

Пусть $P_0 = P(x_0, y_0)$ есть любая точка плоскости XOY и $P_k = P(x_k, y_k)$ точка с координатами:

$$x_k = x(t_0 + kT; t_0, x_0, y_0), \quad y_k = y(t_0 + kT; t_0, x_0, y_0),$$

где t_0 — фиксированное число и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Обозначим через

$$P_1 = S(P_0)$$

преобразование плоскости XOY в самое себя, переводящее точку P_0 в точку P_1. В силу условия I_4 преобразование S^k переводит точку P_0 в точку P_k. Если найдется точка P_0^* такая, что

$$S^k(P_0^*) = P_0^* \qquad (|k| \geqslant 1),$$

то, в силу условия I_3, решение, соответствующее точке P_0^* при $t = t_0$, есть периодическое, имеющее период $|k|T$.

Наряду с системой (1), рассмотрим „укороченную систему“:

$$\frac{dx}{dt} = f_{11}x + f_{12}y, \qquad \frac{dy}{dt} = f_{21}x + f_{22}y. \tag{1'}$$

Лемма. *Пусть*

$$U = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

есть положительно определенная квадратичная форма ($A > 0$, $AC - B^2 > 0$) *с постоянными коэффициентами и* dU/dt — *ее полная производная в силу уравнений* (1').

Если в некоторой области $\sqrt{x^2 + y^2} = r > r_0$ *выполнено условие:*

$$\inf \frac{1}{r^2}\left|\frac{dU}{dt}\right| > 0,$$

то система (1) *имеет по меньшей мере одно периодическое решение, допускающее период* T.

Справедливость леммы непосредственно вытекает из известного топологического принципа Шаудэра.

Теорема 1. *Пусть*

$$\lambda_1 = \lambda_1(t, x, y), \qquad \lambda_2 = \lambda_2(t, x, y)$$

непрерывные функции, являющиеся корнями „характеристического уравнения“ системы (1):

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Положим, что при $\sqrt{x^2 + y^2} = r > r_0$ *выполнены условия:*

II_1. *Корни* λ_1 *и* λ_2 *имеют вещественные части одного и того же постоянного знака, причем*

$$|\operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_2| = |f_{11} + f_{22}| \geqslant \alpha,$$

где α — *положительная константа.*

II_2. *Корни* λ_1 *и* λ_2 *различны и, сверх того,*

$$0 < |\lambda_1 - \lambda_2| < \beta|\lambda_1 + \lambda_2|,$$

где β — *положительная константа, которая в случае, если корни* λ_1 *и* λ_2 *действительны, удовлетворяет неравенству*

$$0 < \beta < 1.$$

II_3. *Равномерно по совокупности переменных t, x и y существуют конечные пределы:*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{2f_{12}}{f_{11}-f_{22}} = k_1, \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{2f_{21}}{f_{11}-f_{22}} = k_2.$$

II_4.

$$k_1 k_2 + 1 \neq 0.$$

Тогда система (1) *имеет по меньшей мере одно периодическое решение периода T.*

Доказательство теоремы 1 получается путем применения леммы.

Из условия II_2 следует, что каждый из корней λ_1 и λ_2 при $r\to\infty$ не должен быть „исчезающе малым" по сравнению с другим. Можно несколько ослабить это требование.

Теорема 2. *Положим, что система* (1) *при* $\sqrt{x^2+y^2}=r>r_0$ *удовлетворяет условиям:*

III_1. *Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения* (2) *имеют вещественные части одного и того же постоянного знака, причем*

$$|\operatorname{Re}\lambda_1 + \operatorname{Re}\lambda_2| = |f_{11}+f_{22}| \geqslant \alpha,$$

где α — положительная константа.

III_2. *Существует положительное число β_1 такое, что*

$$|f_{11}-f_{22}| \leqslant \beta_1 |f_{11}+f_{22}|.$$

III_3. *Существуют положительные числа γ и δ* $(1 \leqslant \delta \leqslant 2)$ *такие, что*

$$f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \geqslant \gamma |f_{11}+f_{22}|^{\delta}.$$

III_4. *Для коэффициентов f_{12} и f_{21} при $r\to\infty$ равномерно относительно совокупности переменных t, x и y имеют место соотношения:*

$$f_{12} = k_1 d + o(|d|^{\delta/2}), \qquad f_{21} = k_2 d + o(|d|^{\delta/2}),$$

где k_1 и k_2 — некоторые постоянные величины и

$$d = \frac{1}{2}(f_{11}-f_{22}).$$

III_5.

$$k_1 k_2 + 1 \neq 0.$$

Тогда система (1) *имеет по меньшей мере одно периодическое решение, допускающее период T.*

Заметим, что в теореме Лефшеца ([1]) для системы специального вида выполнены условия, в сущности, аналогичные условиям III_1—III_5, при $|x|\to\infty$.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Lefschetz, Proc. Nat. Acad. Sci., **29**, №1 (1943).