Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

МАТЕМАТИКА

В. Я. КОЗЛОВ

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $\{\varphi(nx)\}$ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2[0, 2\pi]$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VI 1948)

В этой заметке будем рассматривать функции $\varphi(x)$, определенные для всех действительных значений x и имеющие период 2π. Кроме того, все функции $\varphi(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ будем предполагать лежащими в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Определение. Систему функций $\{\varphi_\alpha(x)\}$ будем называть A-совершенной, если вместе с каждой функцией $\varphi(x)$ к ней принадлежат функции $\varphi(2x)$, $\varphi(3x), \ldots, \varphi(nx), \ldots$, n — целое число. Минимальную A-совершенную систему, построенную над функциями $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ будем обозначать $A[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots]$.

Цель заметки состоит в том, чтобы найти условия, которые нужно наложить на функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, чтобы система $A[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots]$ была полной в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Хорошо известно, что система $A[1, \sin x, \cos x]$ полна в $L_2[0, 2\pi]$, но для произвольных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ система $A[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots]$ может быть неполной.

Полноту отдельных A-совершенных систем рассматривали А. Я. Хинчин, Н. П. Романов [1], Н. И. Ахиезер [2], B. J. Bourgin и Mendel [3, 4]. Последние два автора дали несколько общих достаточных условий.

Переходим к изложению основных результатов.

Теорема 1. *A-совершенная система функций может быть полной и ортогональной только в том случае, если она порождена тремя функциями $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, причем $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = A_1 \cos x + B_1 \sin x$, $\varphi_3(x) = A_2 \cos x + B_2 \sin x$ и $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.*

Теорема 2. *Необходимое и достаточное условие полноты системы $A[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots]$ заключается в полноте другой системы $A[1, \overline{\varphi}_1(x), \varphi_2(x), \ldots]$, где $\overline{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) - \frac{a_0^{(1)}}{2}$, $\overline{\varphi}_1(x) = \varphi_2(x) - \frac{a_0^{(2)}}{2}, \ldots$, $a_0^{(k)}$ обозначает коэффициент Фурье функции $\varphi_k(x)$.*

Теорема 3. *Если A-совершенная система функций $A[1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots]$ неполна, то существует ортогональная нормированная система функций $\{\mu_k(x), \nu_k(x)\}$, обладающая следующими свойствами.*

1) *Разложение функций* $\mu_k(x)$ и $\nu_k(x)$ *имеет вид*

$$\mu_k(x)=\sum_{n=k}^{\infty} a_{nk}\cos nx+b_{nk}\sin nx,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\nu_k(x)=\sum_{n=k}^{\infty} c_{nk}\cos nx+d_{nk}\sin nx,\quad c_{kk}=0,\quad k=1,\ 2,\ldots$$

2) *Каждая функция* $\mu_x(lx)$ *и* $\nu_k(lx)$ (l *целое*) *разлагается в ряд* $\{\mu_k(x),\ \nu_k(x)\}$.

3) *Каждая функция* $\varphi_k(x)$ *разлагается в ряд по системе* $\{\mu_k(x),\ \nu_k(x)\}$.

4) *Выражение* $(\cos x-L\mu_1(x))^2+(\sin x-L_2\nu_1(x))^2\neq 0$ *при любых фиксированных числах* L_1 *и* L_2.

Если система $A[1,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots]$ *полна, то системы* $\{\mu_k(x),\ \nu_k(x)\}$ *со свойствами* 1, 2, 3, *отличной от тригонометрической, не существует.*

Этой теореме можно дать другую формулировку.

Теорема 3'. *Система функций* $A[1,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots]$ *будет неполной в* $L_2[0,\ 2\pi]$, *если существует* A*-совершенная система* $A[1,\theta_1(x),\theta_2(x),\ldots]$, *с помощью функций которой можно апроксимировать в среднем каждую функцию из* $A[1,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots]$ *и такая, что*: $\theta_1(x)$ *ортогональна* k $\theta_k(lx)$ *для всех* $k>2$ *и* $l\geqslant 1$, *в случае же* $k=1$ *при всех* $l>1$; *функция* $\theta_2(x)$ *ортогональна ко всем функциям* $\theta_k(lx)$ *для* $k\neq 2$ *и* $l\geqslant 1$ *и при* $k=2$ *и* $l>1$, *и* $(\theta_1(x)-\lambda_1\sin x)^2+(\theta_2(x)-\lambda_2\cos x)^2\neq 0$ *при любых фиксированных числах* $\lambda_1,\ \lambda_2$.

Если такой A*-совершенной системы не существует, то система* $A[1,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ldots]$ *полна.*

Теорема 3' принимает особо простой вид, если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ будут частного вида:

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos p^n x;\quad \varphi_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n\sin p^n x;\quad \varphi_k(x)=0 \text{ для } k>2.\quad (1)$$

Теорема 3''. *Если система функций* $A[1,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x)]$ *неполна и функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условию* (1), *то существуют две функции* $\mu(x)$, $\nu(x)$ *такие, что*:

1) *Система* $\{\mu(2^n x),\ \nu(2^n x)\}$ *ортогональна.*

2) *Выражение* $(\mu(x)-\lambda_1\sin x)^2+(\nu(x)-\lambda_2\cos x)^2\neq 0$ *при любых фиксированных числах* $\lambda_1,\ \lambda_2$.

3) *Функции* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *разлагаются в ряд по системе* $\{\mu(2^n x),\ \nu(2^n x)\}$.

Если таких функций $\mu(x)$, $\nu(x)$ *не существует, то система полна.*

Введем теперь новую систему функций в гильбертовом пространстве $L_2[0,\ 2\pi]$, которая тесно связана с вопросами полноты A-совершенных систем.

Пусть разложение целого числа n на простые множители имеет следующий вид:

$$n=p_1^{\alpha_1^{(n)}}\,p_2^{\alpha_2^{(n)}}\ldots p_{l_n}^{\alpha_{l_n}^{(n)}}.$$

Каждому простому числу p_l поставим в соответствие независимое комплексное переменное z_l и рассмотрим ядро

$$M(x, \lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) =$$
$$= \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} z_1^{\alpha_1^{(n)}} z_2^{\alpha_2^{(n)}} \ldots z_{l_n}^{\alpha_{l_n}^{(n)}} \cos nx + \lambda_2 \sum_{n=1}^{\infty} z_1^{\alpha_1^{(n)}} z_2^{\alpha_2^{(n)}} \ldots z_{l_n}^{\alpha_{l_n}^{(n)}} \sin nx,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ — любые комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$|z_l| < 1, \quad l = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |z_l|^2 < \infty. \tag{2}$$

Совокупность последовательностей $(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$ со свойством 2 будем обозначать буквой G. λ_1 и λ_2 — любые комплексные числа.

Ядро $M(x, \lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$ определяет для фиксированной последовательности $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ из области G и любой пары комплексных чисел λ_1 и λ_2 две функции из $L_2[0, 2\pi]$. Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |M(x, \lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)|^2 \, dx = \{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2\} \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |z_l|^2}.$$

Определение. Функцию $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$ счетного числа комплексных переменных мы называем союзной $\varphi_k(x)$, если она определяется с помощью $\varphi_k(x)$ и ядра $M(x, \lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$ следующим образом:

$$\Phi^{(k)}(\lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(x, \lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) \varphi_k(x) \, dx =$$
$$= \lambda_1 \Phi_1^{(k)}(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) + \lambda_2 \Phi_2^{(k)}(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots).$$

Теорема 4. *Необходимое условие полноты A-совершенной системы функций $A[1, \varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ заключается в том, чтобы детерминант*

$$D(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) =$$
$$= \begin{vmatrix} \Phi_1^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) & \Phi_2^{(1)}(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) \\ \Phi_1^{(2)}(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) & \Phi_2^{(2)}(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) \end{vmatrix} \tag{3}$$

не обращался в нуль в области G.

Для некоторых классов систем это условие является также и достаточным.

Теорема 5. *Пусть дана система функций $A[1, \varphi_1(x), \varphi_2(x)]$, где*

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$
$$\varphi_2(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \sin nx;$$

тогда необходимое и достаточное условие полноты системы $A[1, \varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ в $L_2[0, 2\pi]$ *будет заключаться в том, чтобы детерминант* (3) *не обращался в нуль в области* G.

Теорема 5 позволяет решить следующую задачу. При каких условиях, наложенных на фиксированные числа $a_1, a_2, \ldots, a_N$, можно найти функцию $u(x)$ такую, что имеет место тождество:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n u(nx) = f(x) \tag{4}$$

для любой фиксированной функции из $L_2[0, 2\pi]$. На этот вопрос отвечает теорема 6.

Теорема 6. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение* (4) *можно было решить для любой нечетной функции* $f(x) \subset L_2[0, 2\pi]$, *заключается в том, чтобы полином*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n z_1^{\alpha_1^{(n)}} z_2^{\alpha_2^{(n)}} \ldots z_{l_n}^{\alpha_{l_n}^{(n)}}$$

не обращался в нуль для $|z_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Поступило
24 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Романов, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, № 1, 3 (1945). [2] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории апроксимации, 1947, стр. 283. [3] B. J. Bourgin and Mendel, Trans. Am. Math. Soc., **57**, № 3 (1945). [4] B. J. Bourgin, ibid., **60**, 478 (1946).