Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Б. ВАСИЛЬЕВА

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 VI 1948)

Предлагаемая работа возникла на основе работы А. Н. Тихонова (1).

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_k,z),\quad i,k=1,2,\ldots,n-1,$$
$$\mu\frac{dz}{dt}=F(t,x_k,z),\quad \mu>0. \tag{1}$$

Решение

$$x_i(t,\mu)\quad (i=1,2,\ldots,n-1),\quad z(t,\mu) \tag{2}$$

этой системы определяется начальными условиями:

$$x_i|_{t=t_0}=x_i^0\quad (i=1,2,\ldots,n-1),\qquad z|_{t=t_0}=z^0.$$

При $\mu=0$ система (1) принимает вырожденный вид:

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_k,z),\quad i,k=1,2,\ldots,n-1, \tag{3}$$
$$z=\varphi(t,x_k),$$

где $z=\varphi(t,x_k)$ — один из корней уравнения $F(t,x_k,z)=0$.

Основная задача заключается в установлении связи решений системы (1) при $\mu\to 0$ с решениями вырожденной системы (3).

Пусть правые части (1) непрерывны и таковы, что через каждую точку (t_0,x_i^0,z^0) проходит единственное решение системы (1). Пусть, далее, $z=\varphi(t,x_k)$ изолированный и устойчивый корень уравнения $F(t,x_k,z)=0$, т. е. функция $F(t,x_k,z)$ меняет знак с $+$ на $-$, когда z, возрастая, проходит через значение $z=\varphi(t,x_k)$. Пусть, наконец, точка (t_0,x_i^0,z^0) является внутренней точкой так называемой области влияния устойчивого корня $z=\varphi(t,x_k)$, определяемой как совокупность точек (t',x_i',z') таких, что знак функции $F(t',x_i',z)$ сохраняется при изменении z от z' до $\varphi(t',x_i')$.

В этих предположениях, как показано в (1), имеют место следующие предельные равенства:

$$\lim_{\mu\to 0}x_i(t,\mu)=\bar{x}_i(t),\qquad i=1,2,\ldots,n-1,\quad t\geqslant t_0;$$
$$\lim_{\mu\to 0}z(t,\mu)=\varphi(t,\bar{x}_k(t)),\qquad t>t_0,$$

где $\bar{x}_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ определяется условиями:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = f_i(t, \bar{x}_k, \varphi(t, \bar{x}_k)),$$

$$x_i|_{t=t_0} = x_i^0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

В качестве продолжения работы А. Н. Тихонова удается провести исследование при $\mu \to 0$ производных по t любого порядка от функций (2), а также производных первого порядка от этих же функций по параметру μ. Ниже приводятся результаты этого исследования.

Относительно производных по t задача состоит в выяснении справедливости предельных равенств:

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{d^m}{dt^m} x_i(t, \mu) = \frac{d^m}{dt^m} \bar{x}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{d^m}{dt^m} z(t, \mu) = \frac{d^m}{dt^m} \varphi(t, \bar{x}_k(t)). \tag{4}$$

Будем говорить, что система (1) принадлежит к типу D_m, если каждая из функций $f_i(t, x_k, z)$ дифференцируема $m-1$ раз, а $F(t, x_k, z)$ дифференцируема m раз, и, кроме того, $F_z'(t, x_k, \varphi(t, x_k)) < < 0$ — условие, являющееся достаточным для устойчивости корня $z = \varphi(t, x_k)$.

Все рассмотрение ведется в некоторой ограниченной области в пространстве t, x_i, z, для которой $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и из которой не выходит решение (2) системы (1) при всех рассматриваемых t.

Теорема. *Если система* (1) *принадлежит к типу D_m, то для любого t $(t_0 < t \leqslant T)$ справедливы предельные равенства* (4), *причем каково бы ни было $t' > t_0$, на отрезке $[t', T]$ стремление к пределам равномерное относительно t.*

Исследование дифференцируемости по μ функций (2) составляет основное содержание работы. Производные $\frac{\partial}{\partial \mu} x_i(t, \mu)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и $\frac{\partial}{\partial \mu} z(t, \mu)$, которые обозначим соответственно через $y_i(t, \mu)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и $u(t, \mu)$, удовлетворяют следующей системе линейных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями t, $x_k(t, \mu)$, $z(t, \mu)$:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial f_i}{\partial z} u, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\mu \frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_k} y_k + \frac{\partial F}{\partial z} u - \frac{dz}{dt} \tag{5}$$

при начальных условиях

$$y_i|_{t=0} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad u|_{t=0} = 0.$$

Будем считать $t_0 = 0$.

Если в (5) положить $\mu = 0$, то получается вырожденная система уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\frac{\partial f_i}{\partial x_k}} y_k + \overline{\frac{\partial f_i}{\partial z}} u, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6}$$

$$u=\frac{\frac{d\varphi}{dt}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\overline{\partial F}}{\partial x_k}y_k}{\frac{\overline{\partial F}}{\partial z}}. \tag{6^1}$$

Черта над характеристикой функции означает, что функция берется от предельных значений аргументов, т. е. от $t, \overline{x}_k(t), \varphi(t, \overline{x}_k(t))$. Если, воспользовавшись (6^1), исключить u из (6), то для y_i получится следующая система уравнений:

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\overline{\partial f_i}}{\partial x_k}-\frac{\overline{\partial f_i}}{\partial z}\frac{\frac{\overline{\partial F}}{\partial x_k}}{\frac{\overline{\partial F}}{\partial z}}\right)y_k+\frac{\overline{\partial f_i}}{\partial z}\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{\overline{\partial F}}{\partial z}}, \quad i=1, 2, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Вопрос заключается в том, во-первых, существует ли система функций $\lim\limits_{\mu\to 0} y_i(t, \mu)$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, удовлетворяет ли она системе уравнений (7) и какими начальными условиями она определяется; во-вторых, существует ли функция $\lim\limits_{\mu\to 0} u(t, \mu)$ такая, что совокупность всех предельных функций удовлетворяет уравнению (6^1).

Будем говорить, что система (1) принадлежит к типу H, если все $f_i(t, x_k, z)$ и $F(t, x_k, z)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка, $F_z'(t, x_k, z)$ удовлетворяет условию Гельдера по всем аргументам и $F_z'(t, x_k, \varphi(t, x_k))<0$.

Теорема. *Если система* (1) *принадлежит к типу H, то*

$$\lim_{\mu\to 0} y_i(t, \mu)=\overline{y}_i(t), \quad i=1, 2, \ldots, n-1, \quad 0<t\leqslant T,$$

где $\overline{y}_i(t)(i=1, 2, \ldots, n-1)$ *есть решение системы уравнений* (7), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\overline{y}_i|_{t=0}=\int\limits_{z^0}^{\varphi(0, \overset{\circ}{x}_k)}\frac{f_i(0, \overset{\circ}{x}_k, \zeta)-f_i(0, \overset{\circ}{x}_k, \varphi(0, \overset{\circ}{x}_k))}{F(0, \overset{\circ}{x}_k, \zeta)}d\zeta, \quad i=1, 2, \ldots, n-1.$$

При этом

$$\lim_{\mu\to 0} u(t, \mu)=\overline{u}(t)=\frac{\frac{d\varphi}{dt}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\overline{\partial F}}{\partial x_k}\overline{y}_k}{\frac{\overline{\partial F}}{\partial z}}, \quad 0<t\leqslant T.$$

Каково бы ни было $t'>0$, стремление к пределам равномерное относительно t на отрезке $[t', T]$.

Отметим, что для доказательства теоремы достаточно выполнения условия Гельдера не всюду, а только в некоторой окрестности отрезка прямой, соединяющего точки $(0, x_i^0, z^0)$ и $(0, x_i^0, \varphi(0, x_i^0))$.

В заключение я хочу выразить благодарность А. Н. Тихонову за внимательное руководство.

Поступило
27 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Мат. сб., **22** (**64**), № 2 (1948).