Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

В. И. НЕЧАЕВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ СУММОЙ СЛАГАЕМЫХ ВИДА $\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!}$

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 XI 1948)

1. Пусть n целое $\geqslant 2$; $\nu = 1/n$;

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x; \quad a_n > 0; \tag{1}$$
$$a_n, \ldots, a_1 \text{— целые}; \quad (a_n, \ldots, a_1) = 1.$$

Обозначим через d общий наибольший делитель значений $f(x)$ при x целом. Символом $G(f)$ обозначим наименьшее r такое, что существует некоторое c, при котором всякое целое $N \geqslant c$ может быть представлено в форме

$$N = \frac{f(x_1)}{d} + \cdots + \frac{f(x_r)}{d}; \quad x_1, \ldots, x_r \text{— целые} \geqslant 0 \tag{2}$$

с $r = G(f)$, но не существует никакого $c' \geqslant c$, чтобы всякое целое $N \geqslant c'$ могло быть представлено в форме (2) с $r < G(f)$. Если существует положительное целое x_0 с условием

$$f(x_0) = d,$$

то всякое целое $N \geqslant 1$ можно представить в форме (2) с некоторым r. Символом $g(f)$ обозначим тогда наименьшее r такое, что всякое целое $N \geqslant 1$ может быть представлено в форме (2) с $r = g(f)$.

Для $f(x) = x^n$ И. М. Виноградов [2] показал, что

$$G(x^n) < 3n \log n + 11n.$$

Что касается $g(x^n)$, то в 1935 г. М. М. Артюхов [1] установил, что это величина порядка 2^n, а в 1936 г. Pillai [4] и Dickson [5], используя в существенном метод И. М. Виноградова, дали для $g(x^n)$ точное выражение.

В 1940 г. В. А. Голубев, преподаватель математики в Кувшинове, в письме в Математический институт им. В. А. Стеклова высказал предположение, что для многочлена

$$\varphi(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)$$

$G(\varphi)$ и $g(\varphi)$ примерно одного и того же порядка.

Эта заметка посвящена исследованию $G(\varphi)$ и $g(\varphi)$.

Попутно приводим и некоторые другие результаты. При доказательстве мы пользуемся методом, близким к методу И. М. Виноградова для решения проблемы Варинга.

2. Пусть $f(x)$ вида (1); d' — общий наибольший делитель значений $f'(x)$ при x целом; p — простое число; r и k — целые постоянные.

Символом $\beta = \beta(p)$ обозначим наименьшее целое число со следующим свойством: существует целое число b с условием, что для любых целых m и $s \geqslant \beta$ разрешимо с целыми x сравнение

$$\frac{f(x)}{d} \equiv b + mp^{\beta} \pmod{p^s}.$$

Пусть, далее, $r_0 = \max(2n+1,\ p_1^{\beta_1}, \ldots, p_l^{\beta_l})$, где $p_1, \ldots, p_l$ — различные простые делители d', а $\beta_i = \beta(p_i)$. Полагаем

$$S_{a,q} = \sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q} f(x)};$$

$$A(q) = q^{-r} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} S_{a,q}^{r} e^{-2\pi i \frac{a}{q} Nd}; \quad \sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q).$$

Лемма 1. *При* $r \geqslant r_0$

$$1 \ll \sigma(N) \ll 1.$$

В доказательстве пользуемся для $(a, p^s) = 1$ неравенством

$$|S_{a,p^s}| \leqslant c(n) p^{s(1-\nu)}, \tag{3}$$

выводимым при помощи леммы Л. К. Хуа ([3]).

Пусть $P = \left[\left(\frac{Nd}{a_n}\right)^{\nu} + h\right]$, где h такое наименьшее положительное целое, что для любого $N > 0$ и любых положительных x_i

$$f(p+1) + \sum_{i=1}^{2k+r-1} f(x_i) > Nd;$$

$$\tau = P^{\frac{n^2}{n+1}}; \quad P_1 = [0{,}25\, P]; \quad P_2 = [0{,}5\, P_1^{1-\nu}]; \ldots; P_k = [0{,}5\, P_{k-1}^{1-\nu}];$$

$$\xi_s = P_s, P_s + 1, \ldots, 2P_s - 1; \qquad s = 1, \ldots, k;$$

$$u = f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_k); \quad U \text{ — число всех } u;$$

$I(N)$ — число представлений целого числа N в форме

$$N = \frac{f(x_1)}{d} + \cdots + \frac{f(x_r)}{d} + \frac{u}{d} + \frac{u'}{d},$$

где x_i — целые > 0, u' принимает те же значения, что и u; $N_0 = N - \frac{u}{d} - \frac{u'}{d}$.

Очевидно,

$$I(N)=\int\limits_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} L_\alpha^r U_\alpha^2 e^{-2\pi i\alpha N d}\,d\alpha;\quad L_\alpha=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha f(x)};\quad U_\alpha=\sum_u e^{2\pi i\alpha u}.$$

Обозначим через $I_1(N)$ часть интеграла $I(N)$, отвечающую интервалам

$$-\frac{1}{q\tau}\leqslant\alpha-\frac{a}{q}\leqslant\frac{1}{q\tau};\quad 0<q\leqslant P^{1-\nu};\quad (a,q)=1;\quad 0\leqslant a<q.$$

Лемма 2. *При* $r\geqslant 2n+2$

$$I_1(N)=\frac{\Gamma(1+\nu)^r}{\Gamma(r\nu)}\frac{d^{r\nu-1}}{a_n^{r\nu}}\sum_{N_0} N_0^{r\nu-1}\sigma(N_0)+O(U^2N^{r\nu-1-\nu^1(1-\nu)}).$$

Применяя к оставшейся части $I(N)$ теорему И. М. Виноградова [2], получаем следующую теорему:

Теорема 1.

$$G(f)\leqslant\begin{cases}\min\left(r_1,\ r_0+r_2-2n\log\frac{r_0}{2n}\right) & \text{при } r_0<r_1;\\ r_0 & \text{при } r_0\geqslant r_1,\end{cases}$$

где

при $n\geqslant 12$ $\quad r_1=[10n^2\log n];\quad r_2=4n\log n+2n\log\log n+3{,}2\,n,$

при $4\leqslant n\leqslant 11$ $\quad r_1=2^n+1;\quad r_2=2n(n-2)\log 2+4.$

Следствие.

$$G(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x)\leqslant 27.$$

Лемма 3. *Для* $\varphi(x)$ *и* $p\leqslant n$ *имеем*

$$\beta(p)=1.$$

Следствие. Пусть для $n=2,3,\ldots,11$ $A(n)$ принимает значения 5, 8, 17, 31, 45, 63, 81, 103, 125, 155, а для $n\geqslant 12$

$$A(n)=4n\log n+2n\log\log n+5{,}5\,n.$$

Тогда для $f(x)=\varphi(x)$, а также для $f(x)$ с условием $d'=1$

$$G(f)\leqslant A(n),$$

причем

$$n\leqslant G(\varphi).$$

Символом $H(t,n)$ обозначим для $t\geqslant 1$ наименьшее r с условием, что всякое целое положительное $N\leqslant t$ может быть представлено в форме

$$N\cdot n!=\varphi(x_1)+\ldots+\varphi(x_r);\quad x_1,\ldots,x_r \text{ целые}\geqslant 0.$$

Лемма 4. *Для $t>0$ и целых положительных k и k_1 имеем*:

$$H(t,n) \leqslant k + H\left(e^n t^{e^{-k/n}}, n\right);$$

$$H(t,n) \leqslant \left[\frac{tn!}{\varphi(k_1)}\right] + k_1 + n(\gamma + \log n),$$

где γ — постоянная Эйлера.

Отсюда непосредственно следует

Лемма 5. *При $t \geqslant e^n$*

$$H(t,n) \leqslant n \log\log t + 4{,}5\, n + 3.$$

Теорема 2.

$$n + \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant g(\varphi) \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2} n^2 \log n + 8 n \log n & \textit{для } n \geqslant 14; \\ n^3 \log 2 + 8 n & \textit{для } 4 \leqslant n \leqslant 13. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы необходима оценка всех встречающихся постоянных. Наиболее существенным оказывается влияние постоянной $c(n)$ неравенства (3).

Полученный результат можно несколько улучшить.

Поступило
22 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Артюхов, ДАН, 4, (9), 231 (1935). [2] И. М. Виноградов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 23 (1947). [3] Л. К. Хуа, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 27 (1947). [4] S. S. Pillai, J. Annamalai Univ., 5, 145 (1936). [5] L. E. Dickson, Am. J. Math., 58, 530 (1936).