Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 5

МАТЕМАТИКА

П. П. КОРОВКИН

О РОСТЕ ПОЛИНОМОВ НА МНОЖЕСТВЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 VI 1948)

Пусть E — множество точек плоскости комплексного переменного и $P_n(z)$, $n=1, 2, \ldots$, последовательность полиномов степени n таких, что в каждой точке E

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|P_n(z)|} \leqslant 1, \qquad z \in E. \tag{1}$$

Положим

$$l(E) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max_{\bar{E}} |P_n(z)|},$$

где $\bar{E}$ — замыкание множества E. Число $l(E)$ зависит от взятой последовательности $P_n(z)$.

Рассмотрим всевозможные последовательности полиномов, удовлетворяющие условию (1), и положим

$$L(E) = \sup l(E).$$

Очевидно, что $L(E) \geqslant 1$. Если E состоит из конечного числа точек, то $L(E)=1$. Если E неограничено, то $L(E)=\infty$. Если из множества E удалить конечное число изолированных точек E_1, то $L(E-E_1)=L(E)$. Легко проверяется, что $L(E_1+E_2) \leqslant \max\{L(E_1), L(E_2)\}$. Если $E_1 \subset E_2$, $\bar{E}_1=\bar{E}_2$, то $L(E_1) \geqslant L(E_2)$. Без труда доказывается, что условие (1) можно заменить требованием сходимости к нулю последовательности полиномов $P_n(z)$ на E. Через F_σ мы обозначаем сумму счетного множества замкнутых множеств.

Теорема 1.

$$L(E) = \sup_{E \subset F_\sigma \subset \bar{E}} L(F_\sigma). \tag{2}$$

Доказательство. Если $E \subset F_\sigma$, $\bar{E}=\bar{F}_\sigma$, то $L(E) \geqslant L(F_\sigma)$. Следовательно,

$$L(E) \geqslant \sup_{E \subset F_\sigma \subset \bar{E}} L(F_\sigma). \tag{3}$$

Если последовательность полиномов $P_n(z)$ сходится к нулю на множестве E, то, в силу доказательства теоремы 1 из ([1]), последовательность полиномов $\frac{1}{n} P_n(z)$ сходится на множестве F_σ^*, $F_\sigma^* \supset E$. Полагая $F_\sigma = F_\sigma^* \bar{E}$ получим

$$l(E)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{\overline{E}}|P_n(z)|}=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max_{\overline{E}}\left|\frac{1}{n}P_n(z)\right|}=l(F_\sigma)\leqslant L(F_\sigma),$$

$$l(E)\leqslant\sup_{E\subset F_\sigma\subset\overline{E}}L(F_\sigma),\quad L(E)=\sup l(E)\leqslant\sup_{E\subset F_\sigma\subset\overline{E}}L(F_\sigma). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (2).

Пусть F — ограниченное замкнутое множество, емкость которого [2] $\tau(F)>0$. Пусть $D(F)$ — та из областей, дополнительных к множеству F, которая содержит точку $z=\infty$. Известно [3], что существует функция Грина $g_F(z)$ области $D(F)$, гармоническая в области всюду, кроме точки $z=\infty$, в окрестности которой функция $g_F(z)$ имеет представление $g_F(z)=\ln|z|+u(z)$, где $u(z)$ — гармоническая функция в окрестности точки $z=\infty$, причем $\tau(E)=e^{-u(\infty)}$.

Пусть

$$E=F_1+F_2+\ldots,\quad F_1\subset F_2\subset\ldots,\quad \tau(F_1)>0. \tag{5}$$

Последовательность функций $g_{F_1}(z)$, $g_{F_2}(z),\ldots$ монотонно убывает в области $D(\overline{E})$. Положим

$$g_E(z)=\lim_{n\to\infty}g_{F_n}(z). \tag{6}$$

Можно доказать:

Лемма 1. *Предел* (6) *не зависит от способа представления множества E в виде* (5).

Лемма 2. *Если $E_1\subset E_2$, то $g_{E_1}(z)\geqslant g_{E_2}(z)$ в области $D(\overline{E}_2)$.*

Лемма 3. *Если $E_1\subset E_2$, то равенство $g_{E_1}(z)=g_{E_2}(z)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\tau_*(E_1)=\tau_*(E_2)$.*

Мы сохраняем обозначения из [2].

Лемма 4. $g_E(z)=g_{\overline{E}}(z)$ *тогда и только тогда, когда множество E τ-измеримо.*

Пусть Γ — граница области $D(\overline{E})$, Γ' — множество предельных точек границы Γ. Положим $\alpha(x)=\overline{\lim_{z\to x}}\,g_E(z)$, $x\in\Gamma$, $z\in D$,

$$\alpha(E)=\max_{x\subseteq\Gamma'}\alpha(x).$$

Легко доказать, что $\alpha(E)\leqslant\ln\frac{d(E)}{\tau_*(E)}$, где $d(E)$ — диаметр множества E.

Пусть $t_n(z,F)=z^n+\alpha_1^{(n)}z^{n-1}+\ldots+\alpha_n^{(n)}$ — полином, наименее уклоняющийся от нуля на множестве F, корни которого принадлежат множеству F. Положим $m_n(F)=\max_F|t_n(z,F)|$.

Известно [4], что

$$\tau(F)=\lim\sqrt[n]{m_n(F)}.$$

Легко доказывается:

Лемма 5.

$$g_F(z)=\lim\frac{1}{n}\left|\frac{t_n(z,F)}{m_n(F)}\right|,\qquad z\in D(F), \tag{7}$$

Лемма 6.

$$L(E)\leqslant e^{\alpha(E)}. \tag{8}$$

Доказательство. Если последовательность полиномов $P_n(z)$ сходится к нулю на множестве E, то, в силу доказательства леммы 2 из (¹), по числу $\varepsilon_n > 0$ можно указать множество $F_n \subset E$, $\tau(F_n) > \tau_*(E) - \varepsilon_n$, сходимость на котором будет равномерной.

Пусть $\varepsilon_n \to 0$ и $E_1 = F_1 + F_2 + \ldots$, $F_n \subset F_{n+1}$. В силу теоремы 3 из (²) $\tau_*(E_1) = \lim \tau(F_1) = \tau_*(E)$. В силу леммы 3 $g_{E_1}(z) = g_E(z)$.

Пусть D_1 — область $g_E(z) > \alpha(E) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В области D_1 может находиться только конечное число изолированных точек множества E. Выбросив их, мы не изменим числа $L(E)$. Последовательность функций $g_{F_n}(z)$ сходится к функции $g_{E_1}(z) = g_E(z)$ равномерно в замкнутой области $\overline{D_1}$. Следовательно, $g_{F_n}(z) < \alpha(E) + 2\varepsilon$ на границе Γ_1 области D_1, если $n > N(\varepsilon)$.

Так как на множестве F_n последовательность $P_n(z)$ сходится к нулю равномерно, то $|P_s(z)| < 1$, $s > m$, $z \in F_n$. Известно (⁵), что при этом $\sqrt[s]{|P_s(z)|} < e^{g_{F_n}(z)}$, $z \in D(F_n)$. Следовательно,

$$\sqrt[s]{|P_s(z)|} \leqslant e^{\alpha(E) + 2\varepsilon}, \quad z \in \Gamma_1,$$

$$l(E) = \overline{\lim_{s \to \infty}} \sqrt[s]{\max_{E} |P_s(z)|} \leqslant \overline{\lim_{s \to \infty}} \sqrt[s]{\max_{\Gamma_1} |P_s(z)|} \leqslant e^{\alpha(E) + 2\varepsilon},$$

$$L(E) = \sup l(E) \leqslant e^{\alpha(E) + 2\varepsilon}.$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует лемма 6.

Теорема 2.

$$L(E) = e^{\alpha(E)}.$$

Доказательство. Пусть $E = F_1 + F_2 + \ldots$, $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ Пусть x — та точка множества Γ', в которой $\alpha(x) = \alpha(E)$.

Обозначим через $\tilde{F}_n$ множество точек множества F_n, не принадлежащих кругу $|z - x| < r_n$, где r_n — последовательность положительных чисел, стремящихся монотонно к нулю.

Положим $E_1 = \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 + \ldots$ Множество E_1 может отличаться от множества E на одну точку x, если она принадлежит множеству E. Так как $\tilde{F}_n \subset E$, то $g_{\tilde{F}_n}(z) \geqslant g_E(z)$. В точке x имеем

$$g_{\tilde{F}_n}(x) \geqslant \overline{\lim_{x \to z}}\, g_E(z) = \alpha(x) = \alpha(E).$$

Точка x — предельная для множества E. Так как функция $g_{\tilde{F}_n}(z)$ непрерывна в окрестности точки x, то найдется точка x_n, $x_n \in E$, $x_n \in D(\tilde{F}_n)$, $x_n \neq x$, такая, что

$$g_{\tilde{F}_n}(x_n) > \alpha(E) - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_n \to 0.$$

В силу леммы 5 имеем

$$g_{\tilde{F}_n}(x) = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \ln \left| \frac{t_s(x_n, \tilde{F}_n)}{s\, m_s(\tilde{F}_n)} \right|.$$

Выберем последовательность чисел s_n так, чтобы выполнялись условия:

$$1)\ s_{n+1} > s_n, \qquad 2)\ |x_n - x|^{1/s_n} \to 1, \qquad 3)\ \frac{1}{s_n} \ln \left| \frac{t_{s_n}(x_n, \bar{F}_n)}{s_n m_{s_n}(\bar{F}_n)} \right| > \alpha(E) - 2\varepsilon_n.$$

Последовательность полиномов

$$\frac{t_{s_n}(z, \bar{F}_n)}{s_n m_{s_n}(\bar{F}_n)} (z - x) = Q_{s_n+1}(z)$$

сходится к нулю на множестве E. В силу условий (2) и (3) получаем

$$l(E) = \overline{\lim} \sqrt[s_n+1]{\max_{E} |Q_{s_n+1}(z)|} \geqslant \overline{\lim} \sqrt[s_n+1]{|Q_{s_n+1}(x_n)|} \geqslant e^{\alpha(E)}. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) следует теорема 2.

Из теоремы 2 следует, что для ограниченных множеств E при $\tau(E) > 0$:

$$L(E) = e^{\alpha(E)} \leqslant e^{\ln \frac{d(E)}{\tau_*(E)}} = \frac{d(E)}{\tau_*(E)} < \infty.$$

Если E бесконечное F_σ-множество и $\tau_*(E) = 0$, то легко показать, что $L(E) = \infty$.

Пусть D — область, содержащая точку $z = \infty$, и Γ — граница области D. Пусть $f(x)$, x — точка границы Γ, непрерывная функция. Если для всякой непрерывной функции $f(x)$ существует гармоническая в области D функция $u_f(z)$, имеющая предельные значения на границе Γ, совпадающие с $f(x)$, то говорят, что в области D разрешима задача Дирихле.

Можно доказать:

Теорема 3. *Для разрешимости задачи Дирихле в области D необходимо и достаточно, чтобы граница Γ не имела изолированных точек и чтобы выполнялось равенство $L(\Gamma) = 1$.*

Поступило
10 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Коровкин, ДАН, **58**, № 8 (1947). [2] П. П. Коровкин, ДАН, **20**, № 7 (1947). [3] Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, 1941. [4] G. Pólya u. G. Szegö, J. f. reine u. angew. Math., 165, 4 (1931). [5] J. L. Walsch, Am. Math. Soc., **20** (1935).