Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. И. КОВАНЦОВ

ОБОБЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 VI 1948)

Одним из основных разделов проективно-дифференциальной геометрии поверхностей является теория прямых канонического пучка. Известно несколько канонических прямых: директриса Вильчинского, ребро Грина, ось Чеха, нормаль Фубини, прямая Картана. При первом взгляде на канонический пучок бросается в глаза исключительная разнохарактерность тех конструкций, с помощью которых строится та или иная каноническая прямая.

Настоящая работа содержит такие обобщения классических конструкций, которые охватывают одной схемой сразу весь канонический пучок. В дальнейшем всюду предполагается, что поверхность отнесена к асимптотическим линиям.

1. Обобщение конструкции Фубини. Нормалью Фубини называется линия пересечения соприкасающихся плоскостей трех кривых (касающихся линий Сегре), вдоль которых интеграл от квадратного корня из квадратичной формы Фубини $2\beta\gamma\, du\, dv$ достигает экстремальных значений. Картан показал, что для кубичной формы $\beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)$ получается директриса Вильчинского, а для отношения кубичной формы к квадратичной — новая прямая (прямая Картана). Выбор указанных форм по отношению к построению соответствующих канонических прямых носит характер совершенного произвола. Мы найдем общее выражение для дифференциальной формы от β, γ, du, dv, инвариантной относительно преобразования параметров вида $u = u(\bar{u})$, $v = v(\bar{v})$.

Пусть $f(\beta, \gamma, du, dv)$ — искомая форма. Тогда справедливо тождество

$$f(\bar{\beta}, \bar{\gamma}, d\bar{u}, d\bar{v}) \equiv f(\beta, \gamma, du, dv),$$

или

$$f\left(a\frac{t^2}{x}, b\frac{x^2}{t}, \frac{c}{t}, \frac{d}{x}\right) \equiv f(a, b, c, d), \tag{1}$$

где

$$a = \beta, \quad b = \gamma, \quad c = du, \quad d = dv, \quad t = \frac{du}{d\bar{u}} \quad x = \frac{dv}{d\bar{v}}.$$

Продифференцируем тождество (1) по x и t, положив в левой части после дифференцирования $x = t = 1$. Получим систему двух уравнений в частных производных первого порядка, интегрируя которую, найдем:

$$f=\psi(\gamma\beta^2\,du^3,\ \beta\gamma^2\,dv^3),$$

где ψ — произвольная дифференцируемая функция.

Из определения дифференциальной формы следует равенство:

$$\psi(\gamma\beta^2\,du^3,\ \beta\gamma^2\,dv^3)=(\gamma\beta^2)^n\,du^{3n}\,\psi(1,\gamma\beta^{-1}\nu'^3).$$

Полагая

$$\sqrt[3n]{\psi(1,\gamma\beta^{-1}\nu'^3)}=P(\gamma\beta^{-1}\nu'^3),$$

по формуле Эйлера — Лагранжа для $\nu'=\varepsilon\sqrt[3]{\beta\gamma^{-1}}$ найдем

$$\nu''=\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\left(\frac{\partial\ln\beta^{\lambda}\gamma^{2\lambda-1}}{\partial u}-\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\,\frac{\partial\ln\gamma^{\mu}\beta^{2\mu-1}}{\partial v}\right),\tag{2}$$

где

$$\lambda=\frac{b+3c}{3(3c+2b)},\quad \mu=\frac{3b+3c-a/3}{3\,(3c+2b)},\quad a=P\left[\frac{\gamma}{\beta}\left(\varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\right)^3\right]=P(1),$$

$$b=P'(1),\quad c=P''(1),\quad \varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Формула (2) дает двухпараметрическое семейство прямых, т. е. связку. В нее входит канонический пучок $\lambda=\mu$. Поэтому всю связку естественно назвать канонической. Для канонического пучка $\lambda=\mu$ имеем $b=a/6$.

В качестве примера дифференциальных форм, соответствующих всем прямым канонического пучка, можно взять формы:

$$f=\beta^{\alpha}\gamma^{t}\,du^{2\alpha-}\,dv^{2t-\alpha}+\beta^{t}\gamma^{\alpha}\,du^{2t-\alpha}\,dv^{2\alpha-t},\tag{3}$$

где α, t — произвольные числа.

При $\alpha=t=1$ имеем форму для нормали Фубини; при $\alpha=1$, $t=0$ — для прямой Картана; при $\alpha=2$, $t=1$ — для директрисы Вильчинского.

Для всех форм (3) действительно выполняется равенство $b=a/6$.

2. Обобщение конструкции Грина. Из произвольной точки прямой l_1, проходящей через данную точку поверхности и не лежащей в касательной плоскости, проектируется асимптотическая $v=\mathrm{const}$ на касательную плоскость. Ищется пучок кривых 2-го порядка, лежащих в касательной плоскости и имеющих с проекцией касание третьего порядка. Ищется полюс P_1 касательной к линии $u=\mathrm{const}$ относительно этого пучка. Аналогично находится полюс P_2. Если прямые l_1, P_1P_2 полярно сопряжены относительно пучка поверхностей Дарбу, то они называются ребрами Грина. Обобщая эту конструкцию, возьмем вместо асимптотических пару кривых $v=v(u)$ и $u=u(v)$, имеющих с асимптотическими касания второго порядка, так что $v'''=h\neq 0$, $u'''=h'\neq 0$. Сохраняя в остальном все последовательные этапы классической конструкции Грина, получим в нормальном тетраэдре ([1]) направляющие параметры обобщенного ребра Грина:

$$l=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\ln\gamma}{\partial v}+4b+\frac{h'}{\gamma}\right),\quad m=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a+\frac{h}{\beta}\right).\tag{4}$$

При $h=h'=0$ получаем классическое ребро Грина.

Беря конгруенцию обобщенного ребра Грина, мы должны считать h и h' некоторыми функциями от криволинейных координат u, v точки поверхности, преобразующимися при указанной выше замене параметров как βm и γl, т. е.

$$\bar{h}' = h' \frac{d\bar{u}}{du}\left(\frac{dv}{d\bar{v}}\right)^3, \qquad \bar{h} = h\frac{d\bar{v}}{dv}\left(\frac{du}{d\bar{u}}\right)^3. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что третьи производные при условии равенства нулю первых и вторых производных преобразуются именно по такому закону. Сохраним при построении обобщенных ребер Грина ту окрестность точки на поверхности, с помощью которой строятся прямые канонического пучка, т. е. окрестность, определяемую лишь β, γ и их производными первого порядка. Пусть искомая функция $f(\beta, \gamma, \beta_u, \beta_v, \gamma_u, \gamma_v)$ преобразуется, как, например, $h\beta^{-1}$, т. е.

$$f(\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\beta}_{\bar{u}}, \bar{\beta}_{\bar{v}}, \bar{\gamma}_{\bar{u}}, \bar{\gamma}_{\bar{v}}) \equiv f(\beta, \gamma, \beta_u, \beta_v, \gamma_u, \gamma_v)\frac{du}{d\bar{u}}.$$

Заменяя в левой части $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ и т. д. их значениями по формулам преобразования, дифференцируя тождество по $\frac{du}{d\bar{u}}$, $\frac{dv}{d\bar{v}}$, $\frac{d^2u}{d\bar{u}^2}$, $\frac{d^2v}{d\bar{v}^2}$ и полагая после дифференцирования $\frac{du}{d\bar{u}} = \frac{dv}{d\bar{v}} = 1$, $\frac{d^2u}{d\bar{u}^2} = \frac{d^2v}{d\bar{v}^2} = 0$, получим систему четырех уравнений в частных производных первого порядка, интегрируя которую, найдем

$$h = \beta\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\, F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}, \ \frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial u}\right),$$

где F — произвольная дифференцируемая функция.

Аналогично получим h' с новой произвольной функцией F_1 тех же аргументов.

Полагая, например,

$$F = (2\lambda - 1)\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}, \quad F_1 = (2\mu - 1)\frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v},$$

где λ, μ — некоторые постоянные, получим каноническую связку.

3. Обобщение конструкции Чеха. По теореме Чеха ось Чеха есть линия пересечения соприкасающихся плоскостей трех линий Сегре. Обобщая эту конструкцию, возьмем три кривых $v = v_i(u)$ $(i = 0, 1, 2)$, имеющих с линиями Сегре касания первого порядка. Для таких кривых имеем формулы преобразования при известной замене параметров

$$\bar{v}_i'' = v_i''\left(\frac{du}{d\bar{u}}\right)^2\frac{d\bar{v}}{dv} + \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\frac{d^2u}{d\bar{u}^2}\frac{d\bar{v}}{dv} - \varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}}\left(\frac{du}{d\bar{u}}\right)^2\left(\frac{d\bar{v}}{dv}\right)^3\frac{d^2v}{d\bar{v}^2}. \tag{6}$$

При тех же требованиях и по тому же методу, что и при обобщении конструкции Грина, из (6) найдем

$$v_i'' = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\left[\frac{\partial \ln \beta}{\partial u} - \varepsilon\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v} + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^2\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\, F_i\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}\frac{\partial \ln \beta\gamma^2}{\partial u}, \ \frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\frac{\partial \ln \gamma\beta^2}{\partial v}\right)\right].$$

Считая $\overline{F}_i$ комплексной функцией вида $A \pm Bi$, где A, B — действительные функции тех же аргументов, и полагая

$$A = \frac{1}{2}(F_1 - F), \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2}(F_1 + F),$$

где F, F_1 — функции из обобщенной конструкции Грина, найдем, что классы прямых, строимых по обобщенным схемам Грина и Чеха, полностью совпадают.

Поступило
16 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937.