Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. Я. ВИЛЕНКИН

О КЛАССИФИКАЦИИ НУЛЬМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VI 1948)

1. В этой работе мы будем употреблять те же обозначения, что и в [1].

2. Пусть G — группа типа P. Положим $G_0 = G$. Пусть уже для всех трансфинитных чисел $\beta < \alpha$ определены подгруппы G_β. Если существует $\alpha - 1$, то положим $G_\alpha = p^\omega G_{\alpha-1}$. Если же α является трансфинитным числом второго рода, то положим $G_\alpha = \prod\limits_{\beta > \alpha} G_\beta$. Цепочка подгрупп

$$G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_\alpha \supset \ldots \supset G_\tau$$

оборвется на трансфинитном числе $\tau < \Omega$, причем $G_\tau = p^\omega G_\tau$.

Обозначим $p^n G_\alpha$ через $p^{\omega\alpha+n} G$. Гомоморфное отображение G_α на $\hat{G}_\alpha = G_\alpha / G_{\alpha+1}$ обозначим φ_α.

3. Наложим на группу G и ее открытую и компактную подгруппу H следующие условия, обобщающие условия правильной расслоенности и правильности подгруппы: при всех α и n имеем:

1) ${}_n\overline{[p^\alpha G]} = \overline{{}_n[p^\alpha G]}$;

2) $p^n G \cap \overline{p^{\alpha+n} G} = p^n (\overline{p^\alpha G})$;

3) $p^n G \cap G_\alpha = p^n G_\alpha$;

4) $p^n H \cap p^{\alpha+n} G = p^n (H \cap p^\alpha G)$.

4. Имеет место

Теорема 1. *Если группа G типа P и ее открытая и компактная подгруппа H удовлетворяют условиям 1) — 4), причем ${}_\infty[G] = 0$ (соотв. $G = {}_\infty[G]$), то при любом $\alpha < \tau$ группа $\hat{G}_\alpha$ с отмеченной в ней подгруппой $\hat{H}_\alpha = \varphi_\alpha (H \cap G_\alpha)$ разлагается в прямую сумму групп типа J_p (соотв. конечных циклических групп), а G_τ с отмеченной в ней подгруппой $H_\tau = H \cap G_\tau$ разлагается в прямую сумму групп типа R_p (соотв. p^∞).*

Группы $\hat{G}_\alpha$ ($\alpha < \tau$) с отмеченными подгруппами $\hat{H}_\alpha$ и G_τ с отмеченной подгруппой H_τ назовем факторами группы G с отмеченной открытой и компактной подгруппой H.

5. Теорема 2. *Пусть даны: трансфинитное число τ и для каждого $\alpha < \tau$ числа $\rho_{\alpha,n}$, где $n \geqslant 0$ являются целыми числами, а $\rho_{\alpha,n} \geqslant 0$ могут принимать как целые значения, так и значение ∞. Пусть при любом $\alpha < \tau$ (кроме, быть может, $\tau - 1$) и любом $N > 0$ существует отличное от нуля $\rho_{\alpha,n}$, причем $n \geqslant N$.*

Тогда существует такая группа G типа P с отмеченной в ней отрытой и компактной подгруппой H, удовлетворяющая условиям 1) — 4), *что* $_\infty[G]=G_\tau=0$, *а факторы группы G с отмеченной подгруппой H имеют вид*

$$\hat{G}_\alpha : \hat{H}_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\rho_{\alpha,n}} (A_{in}^\alpha : B_{in}^\alpha),$$

где A_{in}^α — группы типа J_p и B_{in}^α их подгруппы индекса p^n.

6. Теорема 3. *Пусть дана группа G типа P с отмеченной в ней открытой и компактной подгруппой H, удовлетворяющая условиям* 1) — 4), *причем* $_\infty[G]=0$.

Тогда

$$G : H = G^* : (G^* \cap H) \dotplus G_\tau : (G_\tau \cap H),$$

причем группа G^* с отмеченной в ней подгруппой $G^* \cap H$ также удовлетворяет условиям 1) — 4).

В силу доказанной теоремы мы можем ограничиться изучением таких групп рассматриваемого вида, для которых $G_\tau=0$.

7. Теорема 4. *Пусть даны две группы G и G' типа P и в них открытые и компактные подгруппы H и H', причем как для G, так и для G' выполнены условия* 1) — 4), *и* $_\infty[G]=G_\tau={}_\infty[G']=G'_\tau=0$.

Пусть, далее, для любого $\alpha<\tau$ существует такое изоморфное отображение η_α группы $\hat{G}_\alpha$ на $\hat{G}'_\alpha$, что $\eta_\alpha(\hat{H}_\alpha)=\hat{H}'_\alpha$

Тогда существует такое изоморфное отображение η группы G на G', что $\eta(H)=H'$.

Эта теорема показывает, что введенные в теореме 2 числа $\rho_{\alpha,n}$ являются инвариантами группы G с отмеченной в ней подгруппой H, причем группа G с отмеченной подгруппой H однозначно задается своими инвариантами.

8. Пусть для каждого трансфинитного числа α, $\alpha<\tau<\Omega$, заданы числа $\rho_{k,l}^\alpha$ $(0\leqslant k<\infty,\ 0\leqslant l<\infty)$, причем $\rho_{k,l}^\alpha$ может быть как целым неотрицательным числом, так и бесконечностью. Мы будем говорить, что для системы чисел $\rho_{k,l}^\alpha$ выполнено условие А, если из того, что $\rho_{k,l}^\alpha\neq 0$, вытекает в случае, кагда α является трансфинитным числом первого рода, существование для любого $N>0$ такого $\rho_{k_1 l_1}^{\alpha-1}\neq 0$, что $l_1=k+l$ и $k_1\geqslant N$; если же α является трансфинитным числом второго рода, то для любого $\beta<\alpha$ и $N>0$ найдется такое $\rho_{k_1,l_1}^\gamma\neq 0$, что $\beta\leqslant\gamma<\alpha$, $l_1=k+l$ и $k_1\geqslant N$.

9. Перейдем к изучению групп, для которых $\overline{_\infty[G]}=G$.

Теорема 5. *Если G — группа типа P и H — ее открытая и компактная подгруппа, причем $G=\overline{_\infty[G]}$ и выполнены условия* 1) — 4), *то*

$$G : H = G^* : (G^* \cap H) \dotplus G_\tau : (G_\tau \cap H),$$

и в группе G^* с отмеченной в ней подгруппой $G^* \cap H$ также выполнены условия 1) — 4).

10. Теорема 6. *Пусть даны: трансфинитное число τ и для каждого $\alpha<\tau$ числа $\rho_{k,l}^\alpha$ $(0\leqslant k<\infty,\ 0\leqslant l<\infty)$, которые могут принимать как целые неотрицательные значения, так и значение бесконечность, причем эти числа удовлетворяют условию* А.

Тогда существует такая группа G типа P и в ней открытая и компактная подгруппа H, удовлетворяющая условиям 1) — 4), *причем* $G = \overline{{}_\infty[G]}$, *что факторы группы* G *с отмеченной подгруппой* H *имеют вид*

$$\hat{G}_\alpha : \hat{H}_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\alpha_{k,l}} (A_{kli}^\alpha : B_{kli}^\alpha),$$

где A_{kli}^α — *конечные циклические группы и* B_{kli}^α — *их подгруппы индекса* p^k.

11. Теорема 7. *Пусть* G *и* G' — *две группы типа* P, H *и* H' — *их открытые и компактные подгруппы, и пусть они удовлетворяют условиям* 1) — 4), *причем*

$$_\infty[G] = G_\tau = {}_\infty[G'] = G'_\tau = 0.$$

Пусть, далее, для любого α *существует такое изоморфное отображение* η_α $\hat{G}_\alpha$ *на* $\hat{G}'_\alpha$, *что* $\eta_\alpha(\hat{H}_\alpha) = \hat{H}'_\alpha$.

Тогда существует такое изоморфное отображение η *группы* G *на* G', *что* $\eta(H) = H'$.

12. Теорема 8. *Если группа* G *с отмеченной в ней открытой и компактной подгруппой* H *удовлетворяет условиям* 1) — 4) *и если* $_\infty[G/\overline{{}_\infty[G]}]$, *то*

$$G : H = G^* : (G^* \cap H) \dotplus \overline{{}_\infty[G]} : (\overline{{}_\infty[G]} \cap H),$$

причем G^* *и* $G^* \cap H$ *удовлетворяют условиям* 1) — 4), *равно как и* $\overline{{}_\infty[G]}$ *и* $\overline{{}_\infty[G]} \cap H$.

Доказанные теоремы дают полное описание групп типа P с отмеченными в них открытыми и компактными подгруппами H при условии, что выполняются требования 1) — 4) и что $_\infty[G/\overline{{}_\infty[G]}] = 0$.

Эти теоремы аналогичны известным теоремам Ульма и Цыпина о дискретных примарных счетных группах (2).

Поступило
24 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Я. Виленкин, Мат. сб., 91, 61, в. 1, 485 (1945). [2] А. Г. Курош, Теория групп, 1944, стр. 230 — 243.