Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XI 1948)

Настоящая заметка посвящена рассмотрению некоторых свойств функции $w=u+iv$ в предположении, что u, v являются действительными функциями аргументов x, y в некоторой области Ω, удовлетворяющими системе уравнений вида:

$$Au=Bv, \quad Bu=-Av; \tag{1}$$

A, B подчиняются при этом следующим условиям:

$$A=\sum_{l+k\leqslant n} a_{kl}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}, \quad B=\sum_{k+l\leqslant n} b_{kl}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial y^l};$$

коэффициенты a_{kl}, b_{kl} суть действительные аналитические в Ω функции; результант форм

$$\sum_{k+l=n} a_{kl}\lambda^k\mu^l, \quad \sum_{k+l=n} b_{kl}\lambda^k\mu^l$$

отличен всюду в Ω от нуля; $AB=BA$.

В этих предположениях имеет место

Лемма. *Если f, g аналитические в Ω функции (x, y), то необходимым и достаточным условием разрешимости системы $Au=f$, $Bu=g$ является выполнение соотношения $Bf=Ag$. При этом всякое решение этой системы, имеющее в некоторой подобласти $\Omega_1\subseteq\Omega$ непрерывные производные до порядка n, является аналитической функцией (x,y) в Ω_1, аналитически продолжаемой на Ω.*

Система $Au=0$, $Bu=0$ имеет всего n^2 линейно независимых (аналитических) решений.

Из этой леммы получается, что ранг матрицы коэффициентов при $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}$ в выражениях

$$\frac{\partial^{s+t}}{\partial x^s\,\partial y^t}A, \quad \frac{\partial^{s+t}}{\partial x^s\,\partial y^t}B \qquad (0\leqslant s+t\leqslant n-1)$$

равен числу этих выражений $n(n+1)$. При этом можно показать, что будет отличен от нуля минор этой матрицы порядка $n(n+1)$, содержащий для каждого $p=0,1,\ldots,n-1$ ровно $2(p+1)$ столбцов коэффициентов при производных порядка $n+p$. Точка $(x_0, y_0)\in\Omega$, в которой один из миноров такого строения будет отличен от нуля, будет называться обыкновенной. Производные $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}$ $(k+l \leqslant 2n-1)$, коэффициенты при которых не охвачены таким минором, будут называться параметрическими (в точке (x_0, y_0)); их число равно n^2, их порядки не превышают $2n-2$. Выбор параметрических производных допускает известный произвол.

Пусть теперь u, v являются действительными аналитическими функциями (x, y) в области $\Omega_1 \subseteq \Omega$, образующими решение системы (1); функция $w = u + iv$, очевидно, удовлетворяющая уравнению

$$(A + iB) w = 0, \tag{2}$$

будет называться (A, B)-аналитической.

Теорема 1. *Пусть w, w_0 суть (A, B)-аналитические в области $\Omega_1 \subseteq \Omega$ функции, (x, y) — обыкновенная точка из Ω_1 и в этой точке $Aw_0 \neq 0$. Пусть, далее $(x_k, y_k) \in \Omega$ $(k = 1, \ldots, n^2)$, $\omega_1, \ldots, \omega_{n^2}$ — линейно независимые, аналитические решения системы $Au = 0$, $Bu = 0$ и*

$$\delta(w; x, y; x_1, y_1; \ldots; x_{n^2}, y_{n^2}) = \begin{vmatrix} w(x, y) & \omega_1(x, y) & \ldots \omega_{n^2}(x, y) \\ w(x_1 y_1) & \omega_1(x_1, y_1) & \ldots \omega_{n^2}(x_1, y_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w(x_{n^2}, y_{n^2}) & \omega_1(x_{n^2}, y_{n^2}) & \ldots \omega_{n^2}(x_{n^2}, y_{n^2}) \end{vmatrix}.$$

Тогда, если при $x_k \to x$, $y_k \to x$ $(k = 1, \ldots, n^2)$ направление $(x_1 - x)$: $:(y_1 - y) : \ldots : (x_{n^2} - x) : (y_{n^2} - y)$ не приближается к некоторому множеству направлений (сферической) меры нуль (определенному некоторым алгебраическим соотношением), то

$$\frac{\delta(w; x, y; x_1, y_1; \ldots; x_{n^2}, y_{n^2})}{\delta(w_0; x, y; x_1, y_1; \ldots; x_{n^2}, y_{n^2})} \to \frac{Aw}{Aw_0}.$$

Эта теорема позволяет рассматривать Aw как обобщенную производную w.

Очевидно, если w есть (A, B)-аналитическая функция, то Aw также является (A, B)-аналитической в той же области.

Следующая теорема указывает аналог разложения Тейлора. Пусть (x_0, y_0) — обыкновенная точка из Ω, D_s $(s = 1, \ldots, n^2)$ являются параметрическими производными (в этой точке) и $\omega_k^{(0)} = \omega_k^{(0)}(x, y; x_0, y_0)$ $(k = 1, \ldots, n^2)$ суть линейно независимые, аналитические решения системы $Au = 0, Bu = 0$, определенные начальными условиями: $(D_s \omega_k^{(0)})_0 = \delta_{ks}$ (δ_{ks} — символ Кронекера; $(\ )_0$ обозначает значение выражения в скобках при $x = x_0$, $y = y_0$). Пусть, вообще, $\omega_k^{(p+1)} = \omega_k^{(p+1)}(x, y; x_0, y_0)$ являются (аналитическими) решениями системы $Au = \omega_k^{(p)}$, $Bu = i\omega_k^{(p)}$ $(k = 1, \ldots, n^2; p = 0, 1, \ldots)$, определенные начальными данными $(D_s \omega_k^{(p+1)})_0 = 0$ $(s = 1, \ldots, n^2)$. По лемме, такие решения существуют и, очевидно, являются (A, B)-аналитическими функциями.

Теорема 2. *Если w произвольная (A, B)-аналитическая в окрестности обыкновенной точки (x_0, y_0) функция, то в некоторой окрестности этой точки справедливо разложение в равномерно и абсолютно сходящийся ряд:*

$$w(x, y) = \sum_{s=1}^{n^2} \sum_{p=0}^{\infty} \omega_k^{(p)}(x, y; x_0, y_0)(D_s A^p w)_0. \tag{3}$$

Если функции $\omega_1^{(0)}, \ldots, \omega_{n^2}^{(0)}$ подвергнуть линейному преобразованию, то $\omega_1^{(p)}, \ldots, \omega_{n^2}^{(p)}$ преобразуются когредиентно; если $L_1, \ldots, L_{n^2}$ — операторы, полученные соответствующим контрагредиентным преобразованием из $D_1, \ldots, D_{n^2}$, то получается разложение, аналогичное (3), с заменой операторов $D_1, \ldots, D_{n^2}$ через $L_1, \ldots, L_{n^2}$.

Если положить, например,

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad B = 2\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$$

(в этом случае u, v, определенные системой (1), являются бигармоническими функциями; $w = u + iv$ естественно назвать бианалитической функцией), то можно положить

$$\omega_1^{(0)} = 1, \quad \omega_2^{(0)} = z - z_0, \quad \omega_3^{(0)} = \bar{z} - \bar{z}_0, \quad \omega_4^{(0)} = |z - z_0|^2$$

($z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{z}$ означает величину, комплексно сопряженную z). В этом случае $\omega_k^{(p)}$ с точностью до постоянных множителей имеют вид или $(z - z_0)^q$, или $(z - z_0)^q (\bar{z} - \bar{z}_0)$, и формула (3) дает представление Гурса бианалитической функции.

Пусть $M(u, v)$, $N(u, v)$, $P(u, v)$, $Q(u, v)$ — билинейные дифференциальные формы, определенные соотношениями:

$$vAu - uA'v = \frac{\partial}{\partial x} N(u, v) - \frac{\partial}{\partial y} M(u, v),$$

$$vBu - uB'v = \frac{\partial}{\partial x} Q(u, v) - \frac{\partial}{\partial y} P(u, v)$$

(здесь A', B' являются операторами, сопряженными в смысле Лагранжа, соответственно, операторам A, B).

Характеристические формы операторов A', A и B', B совпадают; далее, из $AB = BA$ следует $B'A' = A'B'$.

Таким образом, пара (A', B') удовлетворяет всем ограничениям, наложенным на пару (A, B).

Функция $(x, y; \xi, \eta)$, определенная при $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ и являющаяся по аргументам x, y (A', B')-аналитической в области $\Omega_1 \subseteq \Omega$, будет называться фундаментальным решением уравнения $(A' + iB')w = 0$, если для любой непрерывно дифференцируемой n раз в Ω функции имеет место:

$$\int_{C_r} \{M(u, \Phi) + iP(u, \Phi)\} dx + \{N(u, \Phi) + iQ(u, \Phi)\} dy \xrightarrow[r \to 0]{} 2\pi i u(\xi, \eta).$$

Здесь C_r есть окружность с центром (ξ, η) и радиусом r. Используя прием, указанный Е. Е. Леви ([1]), можно доказать, что в области Ω_1, в которой корни уравнения $\sum\limits_{k+l=n} (a_{kl} + ib_{kl})\, \theta^l = 0$ не меняют кратности, существует фундаментальное решение. В частности, для указанного выше примера

$$\Phi(x, y; \xi, \eta) = -\frac{y - \eta}{x - \xi + i(y - \eta)}.$$

Отсюда получается следующий аналог интегральной формулы Коши.

Теорема 3. *Пусть* $\Omega_1 \subseteq \Omega$ *есть область, в которой кратности корней уравнений* $\sum\limits_{k+l=n} (a_{kl} + ib_{kl})\,\theta^p = 0$ *не меняются. Всякое решение уравнения* $(A + iB)\,w = 0$, *непрерывно дифференцируемое* n *раз, является* (A, B)*-аналитической функцией. При этом, если* $\Phi(x, y; \xi, \eta)$ *есть фундаментальное решение уравнения* $(A' + iB')\,w = 0$, *то всякую* (A, B)*-аналитическую в* Ω_1 *функцию можно представить в виде*

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \{M(w, \Phi) + iP(w, \Phi)\}\,dx + \{N(w, \Phi) + iQ(w, \Phi)\}\,dy,$$

где C — *произвольный простой гладкий контур, лежащий в* Ω_1 *и охватывающий точку* (ξ, η).

Пусть $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n^2}$ — линейно независимые аналитические решения системы $A'u = 0$, $B'u = 0$. Тогда имеет место следующий аналог теоремы Коши.

Теорема 4. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемая* n *раз в* $\Omega_1 \subseteq \Omega$ *функция* w *была* (A, B)*-аналитической, необходимо и достаточно, чтобы для всякого гладкого контура* C, *лежащего в* Ω_1, *выполнялись соотношения:*

$$\int\limits_C \{M(w, \omega'_s) + iP(w, \omega'_s)\}\,dx + \{N(w, \omega'_s) + iQ(w, \omega'_s)\}\,dy = 0, \qquad (4)$$

$$s = 1, \ldots, n^2.$$

В случае, если существует действительное решение системы $A'u = 0$, $B'u = 0$, не меняющее знака в Ω_1, ω_1, то для бианалитичности w достаточно выполнения одного из соотношений (4), именно, соответствующего $s = 1$.

Поступило
17 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Е. Леви, Усп. матем. наук, 8, 249 (1941).