Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 5

МАТЕМАТИКА

А. А. КИСЕЛЕВ

ВЫРАЖЕНИЕ ЧИСЛА КЛАССОВ ИДЕАЛОВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЕЙ ЧЕРЕЗ ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 VI 1948)

1. Нами были доказаны следующие сравнения:

$$hU \equiv \left(\frac{n}{p}\right)\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\varepsilon n}{k}\right)B_{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{k}{n}\right) \pmod p, \tag{1}$$

где p—нечетное простое число; $n>1$; $d=pn$ — дискриминант квадратичного поля $R(\sqrt{d})$; $h=h(d)$ — число классов идеалов и $E=T+U\sqrt{d}>1$ — фундаментальная единица этого поля; $\varepsilon=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$; $\left(\frac{n}{p}\right)$ и $\left(\frac{\varepsilon n}{k}\right)$ — символы Лежандра и Кронекера; $B_{\frac{p-1}{2}}(x)$ — полином Бернулли, определяемый символическим равенством $B_{\frac{p-1}{2}}(x)=(B+x)^{\frac{p-1}{2}}$ при условии, что числа Бернулли B_ν определяются символическими соотношениями $(B+1)^k=B^k$, $k=1,2,\ldots$, $B_0=1$.

В настоящей заметке эти результаты распространяются на случай $d=p$, именно, доказывается сравнение

$$h(p)U\equiv TB_{\frac{p-1}{2}} \pmod p, \tag{2}$$

где p — простое число вида $4k+1$.

Попутно получается и такой результат:

$$T\equiv(-1)^{\frac{h+1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p. \tag{3}$$

Любопытно отметить, что сравнения (2) и (3) можно рассматривать как аналоги сравнения Коши ([1])

$$h(-p)\equiv-2B_{\frac{p+1}{2}} \pmod p$$

и известного сравнения (см., например, ([2]))

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!\equiv(-1)^{\frac{h(-p)+1}{2}} \pmod p,$$

справедливых для простых чисел p вида $4k+3$, $k>0$.

2. Начнем с доказательства следующего вспомогательного тождества для конечных разностей:

$$\sum_{i,\,j\geqslant 1;\; i+j=m} \Delta^{i-1} 1^{m-1} \Delta^{j-1} 1^{m-1} = \frac{1}{(2m-1)\,C_{2(m-1)}^{m-1}}\,\Delta^{m-1} 1^{2m-1} - \frac{2\,(m-1)!}{m} B_m, \quad (4)$$

где m — целое число $\geqslant 2$.

Заметим прежде всего, что

$$\sum_{i,j\geqslant 1;\; i+j=m} \Delta^{i-1} 1^{m-1} \Delta^{j-1} 1^{m-1} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} C_{m-k}^{k-1} \sum_{a=0}^{k-1} a^{m-1} (k-a)^{m-1}. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь полином

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{m+\nu} C_{m-1}^\nu x^{m+\nu} k^{m-\nu-1}.$$

Очевидно, имеем:

$$P'(x) = x^{m-1}(k-x)^{m-1},$$

$$P(k-x) = P(k) - P(x).$$

С другой стороны, по известной символической формуле суммирования,

$$\sum_{a=0}^{k-1} P'(a) = P(k+B) - P(B) = P(k) - P(B) - P(-B).$$

Следовательно, для $m>1$ и $k\geqslant 1$ получим:

$$\sum_{a=0}^{k-1} a^{m-1}(k-a)^{m-1} =$$

$$= k^{2m-1} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{m+\nu} C_{m+\nu}^\nu - 2 \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{m+\nu} C_{m-1}^\nu B_{m+\nu} k^{m-\nu-1} =$$

$$= \frac{k^{2m-1}}{(2m-1)\,C_{2(m-1)}^{m-1}} - 2 \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{m+\nu} C_{m-1}^\nu B_{m+\nu} k^{m-\nu-1}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), меняя порядок суммирования и пользуясь обычными формулами для конечных разностей, докажем (4).

Пусть теперь и в дальнейшем $m = \frac{p-1}{2}$; тогда

$$\Delta^{m-1} 1^{2m-1} \equiv (-1)^m 2 \pmod p,$$

и, следовательно, из (4) получим:

$$B_m \equiv -\frac{1}{m!}\left(1 + \frac{1}{8} \sum_{i,\,j\geqslant 1;\; i+j=m} \Delta^{i-1} 1^{m-1} \Delta^{j-1} 1^{m-1}\right) \pmod p. \quad (7)$$

3. Рассмотрим теперь суммы

$$S_k = \sum_{0<b<p} (1-\zeta^b)^k,$$

где

$$\zeta = e^{2\pi i/p}, \qquad \left(\frac{b}{p}\right) = -1, \qquad p \equiv 1 \pmod 4.$$

Пользуясь известными значениями сумм Гаусса (см., например, ([3])), получим

$$S_k = \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p}}{2} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu} \left(\frac{\nu}{p}\right) C_k^{\nu} \text{ при } k = 1, 2, \ldots, p-1,$$

откуда, в силу $\left(\frac{\nu}{p}\right) \equiv \nu^m \pmod p$ следует

$$S_k \equiv \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p}}{2} (-1)^k k \Delta^{k-1} 1^{m-1} \pmod{p^{3/2}}. \tag{8}$$

Перейдем теперь к доказательству сравнений (2) и (3). Формула Дирихле для числа классов идеалов вещественных квадратичных полей (см. также ([3])) может быть в случае $d = p$ написана в виде:

$$\sqrt{p}\,(T + U\sqrt{p})^h = \prod_{0<b<p} (1 - \zeta^b). \tag{9}$$

Произведение, стоящее справа, выражается по формулам Варинга через S_k при $k = 1, 2, \ldots, m$, причем знаменатели у всех слагаемых будут взаимно просты с p. Отбрасывая поэтому в получившемся выражении все слагаемые, числители которых, в силу (8), будут делиться на $p^{3/2}$, получим сравнения

$$\sqrt{p}\,(T + U\sqrt{p})^h \equiv 2S_m + \frac{1}{2} \sum_{i,j\geq 1;\ i+j=m} \frac{S_i}{i} \frac{S_j}{j} \pmod{p^{3/2}}. \tag{10}$$

Отсюда с помощью (8) следует

$$T^h \equiv -m! \pmod p, \tag{11}$$

$$hT^{h-1} U \equiv 1 + \frac{1}{8} \sum_{i,j\geq 1;\ i+j=m} \Delta^{i-1} 1^{m-1} \Delta^{j-1} 1^{m-1} \pmod p. \tag{12}$$

Сравнения (11) и $T^2 \equiv -1 \pmod p$ дают теперь (3), а из сравнений (12), (11) и (7) следует (2).

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Ленинградского государственного
университета

Поступило
10 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. L. Cauchy, Mém. Institut de France, 17, 445 (1840). [2] Б. А. Венков, Элементарная теория чисел, гл. 1. 1937. [3] Э. Гекке, Лекции по теории алгебраических чисел, гл. VII, 1940.