Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 6

*МАТЕМАТИКА*

М. М. ВАЙНБЕРГ

# СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ У ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 VI 1948)*

1. В данной работе рассматривается система

$$\mu_i u_i(x) = \int_B K_i(x, y)\, g_i(u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$

в предположении, что каждое ядро $K_i(x, y)$ симметрично, положительно и удовлетворяет условию

$$0 < \int_B\int_B K_i^2(x, y)\, dx\, dy < +\infty, \quad (2)$$

притом

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \quad (3)$$

и

$$g_i(0, 0, \ldots, 0, x) = G(0, 0, \ldots, 0, x) = 0 \quad (4)$$

для всех $x \in B$, где $B$ есть ограниченная область евклидова пространства одного или большего числа измерений. Такую систему, рассмотренную А. П. Гремячинским [1], естественно назвать однородной.

Пусть при $\mu_i = \mu_i^{(0)}$ система (1) имеет решение $u_i(x) = \psi_i(x)$, где каждая функция $\psi_i(x)$ отлична от нуля на множестве положительной меры; тогда совокупность чисел $(\mu_1^{0}, \mu^{(0)}, \ldots, \mu_n^{(0)})$ назовем собственным значением этой системы, а совокупность функций $(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$ назовем собственным элементом или собственной функцией системы.

2. Основная теорема.

Лемма 1. *Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots, x \in B$, есть ортонормированная система в $L_2$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ — какая-нибудь расходящаяся последовательность неубывающих положительных чисел, то множество функций $\omega_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\xi_k^{(m)}}{\sqrt{\lambda_k}} \varphi_k(x)$, где $m = 1, 2, \ldots$ и $\|\xi^{(m)}\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(m)2} \leqslant c^2$ ($c$ выбрано произвольно), компактно в $L_2$.*

Это предложение доказывается чрезвычайно просто.

Теорема 1. *Система* (1) *имеет не менее счетного числа собственных элементов, принадлежащих $L_{2,n}$ и сходящихся в среднем* *к нулю, если совокупность функций* $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ *есть непрерывный оператор в* $L_{2,n}$, *т. е. из сходимости* $(u_{1m}(x), \ldots, u_{nm}(x))$ *к* $(u_1(x) \ldots, u_n(x))$ *вытекает сходимость* $(g_1(u_{1m}(x), \ldots, u_{nm}(x), x); g_2(u_{1m}(x), \ldots, u_{nm}(x), x), \ldots, g_n(u_{1m}(x), \ldots, u_{nm}(x), x))$ *к* $(g_1(u_1(x), \ldots, u_n(x)\, x), \ldots, g_n(u_1(x), \ldots, u_n(x), x))$.

Приведем ход доказательства этой теоремы. Пусть $\varphi_{i1}(x), \varphi_{i2}(x), \ldots, \varphi_{ik}(x), \ldots$ и $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{ik}, \ldots$ $(0 < \lambda_{ik} \leqslant \lambda_{i\,k+1})$ есть вся система собственных функций и чисел ядра $K_i(x, y)$ (в смысле теории линейных интегральных уравнений). Рассмотрим множество функций

$$H_m(\xi_i^{(m_i)}) = H_m(\xi_{11}^{(m_1)}, \ldots, \xi_{1m_1}^{(m_1)}; \ldots; \xi_{n1}^{(m_n)}, \ldots, \xi_{nm_n}^{(m_n)}) =$$

$$= \int_B G(\omega_{1m_1}(y), \omega_{2m_2}(y), \ldots, \omega_{nm_n}(y), y)\, dy,$$

где $\omega_{im_i}(y) = \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\xi_{ik}^{(m_i)}}{\sqrt{\lambda_{ik}}} \varphi_{ik}(y)$ и $\| \xi^{(m_i)} \| \leqslant c_1$ $(m_i = 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots, n;$ число $c_1$ выбрано произвольно). Из леммы 1 и свойств функций $g_i$ и $K_i$ вытекает, что каждая функция $H_m(\xi_i^{(m_i)})$ этого множества непрерывна и имеет частные производные

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{ik}} H_m(\xi_i^{(m_i)}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{ik}}} \int_B \varphi_{ik}(y)\, g_i(\omega_{1m_1}(y), \ldots, \omega_{nm_n}(y), y)\, dy$$

в топологическом произведении сфер $\|\xi_i^{(m_i)}\| \leqslant c_1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, на топологическом произведении поверхностей этих сфер $H_m$ достигает своего абсолютного минимума $d_m$ и абсолютного максимума $D_m$. Из необходимых условий существования условного экстремума находим, что

$$\lambda_i^{(m_i)} \psi_{im_i}(x) = \int_B K_{im_i}(x, y)\, g_i(\psi_{1m_1}(y), \ldots, \psi_{nm_n}(y), y)\, dy, \tag{5}$$

$$\lambda_i^{(m_i)} = \frac{1}{c_1^2} \int_B \psi_{im_i}(y)\, g_i(\psi_{1m_1}(y), \ldots, \psi_{nm_n}(y), y)\, dy, \tag{6}$$

$$\psi_{im_i} = \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\eta_{ik}^{(m_i)}}{\sqrt{\lambda_{ik}}} \varphi_{ik}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ m_i = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

где $(\eta_i^{(m_i)})$ есть точка, в которой $H_m$ достигает $d_m$, т. е.

$$d_m = \int_B G(\psi_{1m_1}(y), \psi_{2m_2}(y), \ldots, \psi_{nm_n}(y), y)\, dy, \tag{8}$$

$$K_{im_i}(x, y) = \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\varphi_{ik}(x)\, \varphi_{ik}(y)}{\lambda_{ik}}, \tag{9}$$

а $\lambda_i^{(m_i)}$ — множители Лагранжа данной экстремальной задачи. Аналогичные выражения мы получим для точки $(\zeta_i^{(m_i)})$, в которой $H_m$ достигает $D_m$. Выражение (7) для точки $(\zeta_i^{(m_i)})$ обозначим через $\Psi_{im_i}(x)$. Отметим, что в случае вырожденных ядер (5) совпадает с (1) и (7) является нетривиальным решением, которое соответствует значениям $\mu_i = \lambda_i^{(m_i)}$. В общем случае положим $m_i = m$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ и рассмотрим последовательности

$$l_{im}=\int\limits_B \psi_{im}^2(x)\,dx \leqslant \frac{c_1^2}{\lambda_{i1}}, \tag{10}$$

$$L_{im}=\int\limits_B \Psi_{im}^2(x)\,dx \leqslant \frac{c_1^2}{\lambda_{i1}}. \tag{11}$$

Из (3), (4), (8) и условия теоремы 1 находим, что

$$|d_m| \leqslant M \sum_{i=1}^{n} l_{im}, \qquad |D_m| \leqslant M \sum_{i=1}^{n} L_{im}, \tag{12}$$

где число $M$ не зависит от $m$. Значит, если $\lim\limits_{m\to\infty} l_{im}=\lim\limits_{m\to\infty} L_{im}=0$, то для всех $m$ $d_m=D_m=0$, ибо из постановки экстремальной задачи ясно, что

$$\ldots \leqslant d_3 \leqslant d_2 \leqslant d_1 \leqslant D_1 \leqslant D_2 \leqslant D_3 \leqslant \ldots,$$

а потому (5), (6) и (7) сохраняются для всякой точки $\left(\eta_{im_k}^{(m)}\right)$ топологического произведения поверхностей сфер. Оказывается, что в этом случае (7), т. е. функции $\psi_{im}(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\xi_{ik}}{\sqrt{\lambda_{ik}}}\varphi_{ik}(x)$ удовлетворяют системе (1), как только $\|\xi_i\|=c_1$. Ясно, что таких функций будет несчетное множество.

Остается рассмотреть случай, когда $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, l_{im}=\alpha_i>0$. В этом случае мы можем выделить подпоследовательность $\psi_{im_k}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, для которой $l_{im_k}>\alpha_i/2>0$. Далее, тем же приемом, как устанавливается (12), мы из (6) находим, что $\lambda_i^{(m_k)}$ ограничены. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что последовательность $m_k$ содержит такую подпоследовательность $p_k$, для которой $\lambda_i^{(p_k)}\to\mu_{i1}$ и $\psi_{ip_k}(x)\Rightarrow\psi_{ic_1}(x)$, где $\|\psi_{ic_1}\|\geqslant \sqrt{\alpha_i/2}>0$. Отсюда и из условия теоремы легко вытекает, что $(\psi_{1c_1}(x), \psi_{2c_1}(x)\ldots,\psi_{nc_1}(x))$ есть собственный элемент системы (1), который соответствует собственному значению $(\mu_{11}, \mu_{21}, \ldots, \mu_{n1})$. Далее, очевидно, что $\psi_{ic_1}(x)$ удовлетворяет неравенству (10), а так как $c_1$ — произвольное число, то можно выбрать такую убывающую последовательность положительных чисел $c_\nu$, чтобы соответствующие им собственные элементы $(\psi_{1c_\nu}(x), \psi_{2c_\nu}(x), \ldots, \psi_{nc_\nu}(x))$ системы (1) удовлетворяли условиям $\|\psi_{ic_{\nu+1}}\|<\|\psi_{ic_\nu}\|$ и $\|\psi_{ic_\nu}\|\to 0$ при $\nu\to\infty$. Теорема доказана.

Приведем теперь несколько условий непрерывности оператора $H_i u=g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$.

Лемма 2 В. В. Немыцкого(²). *Для того чтобы функции $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$, непрерывные для всех действительных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и измеримые в $B$ по $x$, представляли собой непрерывный в $L_{2,n}$ оператор по отношению к сходящейся в $L_{2,n}$ последовательности $(u_{1m}(x), u_{2m}(x), \ldots, u_{nm}(x))$ $(m=1, 2, \ldots)$, достаточно, чтобы для этой последовательности выполнялись неравенства*

$|f_i(u_{1m}(x), u_{2m}(x), \ldots, u_{nm}(x), x)| \leqslant L_i(x)$ $(m=1, 2, \ldots;\ i=1, 2, \ldots, n)$, *где $L_i(x)$ суть какие-нибудь функции из $L_2$.*

Лемма 3. *Для того чтобы функции $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$, непрерывные для всех действительных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и измеримые в $B$*

*по $x$ представляли собой непрерывный оператор в $L_{2,n}$ достаточно, чтобы*

$$|f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b_i \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p_{ik}} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

*где*

$$a_i(x) \in L_{2+\alpha} \ (\alpha > 0, a_i(x) \geqslant 0, \ b_i \geqslant 0, \ 0 \leqslant p_{ik} < 1).$$

Эта лемма является незначительным видоизменением леммы В. В. Немыцкого. Заметим, что лемма сохраняется, если в правой части неравенства содержится еще слагаемое $c_i(x) \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{q_{ik}}$, где $0 \leqslant c_i(x) \in L_2$ и $0 \leqslant q_{ik} < 1/2$.

Лемма 4. *Если $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ удовлетворяют условию Липшица*

$$|f_i(v_1, v_2, \ldots, v_n, x) - f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a \sum_{k=1}^{n} |v_k - u_k|,$$

*то они представляют непрерывный оператор в $L_{2,n}$.*

Из этих лемм и основной теоремы 1 вытекает следующее предложение.

Система (1) имеет не менее счетного числа собственных элементов, принадлежащих $L_{2,n}$ и сходящихся в среднем к нулю, если каждое из ядер $K_i(x, y)$ симметрично, положительно и принадлежит $L_2$, т. е.

$$0 < \int_B\int_B K_i^2(x, y)\, dx\, dy < +\infty,$$

а каждая из функций $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ удовлетворяет одному из условий $A_1$ или $A_2$.

Условие $A_1$. $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ для всех действительных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ непрерывна по $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, измерима в $B$ по $x$ и для всякого компактного в $L_{2,n}$ множества $(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ удовлетворяет либо неравенству

$$|g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)| \leqslant L_i(x) \in L_2,$$

либо неравенству

$$|g_i(u_1(x), u_2(x), u_n(x), x)| \leqslant a_i(x) + b_i \sum_{k=1}^{n} |u_k(x)|^{p_{ik}},$$

где

$$a_i(x) \in L_{2+\alpha} \ (\alpha > 0, a_i(x) \geqslant 0, \ b_i \geqslant 0, \ 0 \leqslant p_{ik} < 1).$$

Условие $A_2$. $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ удовлетворяет по $(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ условию Липшица.

Автор выражает благодарность В. В. Немыцкому за советы по этой работе.

Поступило
3 VI 1948

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Гремячинский, ДАН, **60**, № 3 (1948). [2] В. В. Немыцкий, Матем. сб., **41**, 440 (1934).