Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. О. ГЕЛЬФОНД и Ю. В. ЛИННИК

О МЕТОДЕ ТУЭ И ПРОБЛЕМЕ ЭФФЕКТИВИЗАЦИИ В КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЯХ

Как известно, метод Туэ в проблеме приближения алгебраических чисел алгебраическими же числами, даже в усиленной К. Зигелем форме, не дает возможности установить верхнюю границу для возможных решений неравенства

$$|\alpha-\xi|<CH^{-s\theta}, \quad \theta\leqslant\nu, \quad C<C_0, \tag{1}$$

где α — фиксированное алгебраическое число степени $\nu\geqslant 3$, ξ — алгебраическое число степени s и высоты H, а C_0 зависит только от алгебраических чисел α и ξ. Это обстоятельство связано с тем, что в методе Туэ используется предположение о наличии двух достаточно больших решений и, по существу, доказывается отсутствие двух таких решений для θ не меньших, например, чем $2\sqrt{n}$. Попытки использования более чем двух решений неравенства (1) приводили к необходимости введения в соответствующие теоремы не только неэффективности, но и альтернативности результата.

В настоящей заметке, прежде всего, дается теорема о приближениях алгебраических иррациональностей, являющаяся предельной в смысле эффективности для метода Туэ в настоящее время. Далее приводится одна теорема относительно нижних границ линейных форм с целыми коэффициентами от логарифмов алгебраических чисел, которая может быть получена из предыдущей теоремы, равно как и из соответствующей несколько более слабой теоремы К. Зигеля [1], и, наконец, устанавливается связь между проблемой апроксимации алгебраических иррациональностей и проблемой эффективизации в квадратичных полях. Эта последняя связь указывает на единую, в каком-то смысле, природу неэффективности в теоремах о приближении алгебраических иррациональностей и в вопросе, например, о границе для дискриминантов одноклассных квадратичных полей. Результаты относительно апроксимации алгебраических иррациональностей и их логарифмов принадлежат А. О. Гельфонду, а редукция проблемы эффективизации и относящиеся к этой проблеме результаты принадлежат Ю. В. Линнику.

Введем, прежде всего, определение меры алгебраического числа. Пусть алгебраическое число ξ принадлежит алгебраическому полю K степени s, в котором мы фиксируем какой-либо базис кольца целых чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. Тогда это число ξ может быть бесчисленным множеством способов представлено в форме

$$\xi=\frac{q_1\omega_1+q_2\omega_2+\ldots+q_s\omega_s}{q_{s+1}\omega_1+q_{s+2}\omega_2+\ldots+q_{2s}\omega_s}. \tag{2}$$

Назовем мерой числа ξ целое число q

$$q = \min \max [|q_1|, |q_2|, \ldots, |q_{2s}|], \tag{3}$$

где min взят по всем возможным представлениям числа ξ.

Усилив несколько метод Туэ — Зигеля, можно доказать следующую теорему.

Пусть α и β — два числа алгебраического поля K_0 степени $\nu \geqslant 3$, а ξ_1 и ξ_2 — два алгебраические числа поля K степени s, меры которых будут, соответственно, q_1 и q_2. Пусть также два действительные числа θ_1 и θ_2, $\theta_2 \geqslant \theta_1 > 0$, будут связаны соотношением $\theta_1 \theta_2 = 2\nu(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое, но фиксированное число. Число $\delta > 0$ пусть также будет сколь угодно мало, но фиксировано. Тогда, если неравенство

$$|\alpha - \xi_1| < \frac{1}{q_1^{s\theta_1}} \tag{4}$$

имеет решение при $q_1 > q\,(\alpha, \beta, K_0, K, \varepsilon, \delta)$, где это последнее число q может быть эффективно вычислено, то неравенство

$$|\beta - \xi_2| < \frac{1}{q_2^{s\theta_2}} \tag{5}$$

не будет иметь решений при условии, что

$$\ln q_2 \geqslant \left[\frac{\theta_1 - 1}{2(\sqrt{1+\varepsilon} - 1)} + \delta\right] \ln q_1.$$

Предельность этой теоремы очевидна при $s = 1$, $\alpha = \beta$.

Действительно, если положить $s = 1$ и $\alpha = \beta$, то при $\varepsilon < 0$ мы могли бы взять $\theta_1 < 2$, $\theta_2 < \nu$ и тем самым получить границу для решений неравенства (1) при $\theta = \theta_2$ и $C = 1$, так как неравенство (4) действительно имеет бесчисленное множество решений, если $\theta_1 < 2$. Можно показать, что изменение знака у δ также приводит к эффективизации если не сформулированной теоремы, то, по крайней мере, следующего из этой теоремы утверждения:

Неравенство

$$|x_1 \ln \alpha_1 + x_2 \ln \alpha_2 + \ldots + x_n \ln \alpha_n| < e^{-\varepsilon x}, \quad x = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \tag{6}$$

где $\ln \alpha_1$, $\ln \alpha_2, \ldots, \ln \alpha_n$ — линейно независимые в поле рациональных чисел логарифмы алгебраических чисел, а ε — любое неотрицательное число, имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Без возможности изменения знака ε или δ это последнее утверждение следует из основной теоремы с помощью одного приема К. Малера ([2]), т. е. оно также неэффективно. Другими словами, при заданных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и ε мы не можем указать такого числа x_0, что при $x > x_0$ неравенство (6) не может иметь решений. Как основная теорема, так и следствие из нее могут быть сформулированы в $\wp$-адической форме. Из этих теорем следует также, например, что уравнение

$$A\xi_1^{x_1} \ldots \xi_n^{x_n} + B\eta_1^{y_1} \ldots \eta_m^{y_m} + C\psi_1^{z_1} \ldots \psi_p^{z_p} = 0, \quad ABC \neq 0, \tag{7}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$, $\psi_1, \ldots, \psi_p$ — целые алгебраические числа, каждое из которых не есть алгебраическая единица, произведения

$\xi_1 \ldots \xi_n$, $\eta_1 \ldots \eta_m$, $\psi_1 \ldots \psi_p$ взаимно просты, A, B, C — произвольные алгебраические числа, будет иметь лишь конечное число решений в целых неотрицательных числах $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m, z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Из невозможности неравенства (6) при достаточно больших x следует, в частности, что при $|x_i| \leqslant x$, любом ε и соответствующем ему C_ε будет иметь место для всех x неравенство

$$|x_1 \ln \alpha_1 + x_2 \ln \alpha_2 + x_3 \ln \alpha_3| > C_\varepsilon e^{-\varepsilon x}, \tag{8}$$

где x_1, x_2, x_3 — целые рациональные числа, $\ln \alpha_i$ линейно независимы в рациональном поле, $i = 1, 2, 3$, α_i — алгебраические числа.

С оценкой (8) оказывается связанной известная задача об указании верхней границы D_0 модулей фундаментальных дискриминантов — $D < 0$, для которых поле $h(\sqrt{-D})$ одноклассно (имеет один класс идеалов). Именно, если константу C_ε в неравенстве (8) удалось бы вычислить эффективно для некоторого эффективно указуемого $\varepsilon > 0$, то такую границу D_0 также можно было бы вычислить эффективно.

Пусть $-D < -163$ фундаментальный „одноклассный“ дискриминант; как известно, D — простое число. Рассмотрим примитивный реальный характер $(\mathrm{mod}\, D)$; обозначим его $\chi(n)$; тогда $\chi(-1) = -1$. Пусть $D_1 < D^{1/3}$ какое-либо простое число, а $\chi_1(n)$ реальный характер $(\mathrm{mod}\, D_1)$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$L(s, \chi_1) L(s, \chi_1 \chi) = \zeta(2s)\left(1 - \frac{1}{D_1^{2s}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{D_1} \frac{D_1^2 - D_1^{2s}}{D_1^{2s}} \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s)} \left(\frac{D}{4}\right)^{1/2 - s} \zeta(2s - 1) + R(s), \tag{9}$$

где $|R(s)| < e^{-c_1 \frac{D^{1/2}}{D_1}}$ при $|s| < 3$ (в дальнейшем $c_1, c_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ эффективно вычисляемые положительные константы). Равенство (9) представляет непосредственное обобщение формулы M. Deuring'а из работы (3) с заменой $\zeta(s) L(s, \chi) = \frac{1}{2} \zeta_Q(s)$ на $L(s, \chi_1) L(s, \chi_1 \chi)$.

Положив в (9) $s = 1$, учитывая, в частности, что

$$\lim_{s \to 1} (D_1^2 - D_1^{2s}) \zeta(2s - 1) = -D_1^2 \ln D_1, \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

находим

$$L(1, \chi_1) L(1, \chi_1 \chi) = \zeta(2)\left(1 - \frac{1}{D_1^2}\right) - \frac{2\pi}{D_1} \frac{\ln D_1}{\sqrt{D}} + R_1, \tag{10}$$

где $|R| < e^{-c_1 \frac{D^{1/2}}{D}}$.

Отсюда, деля на $L(1, \chi_1) = c_2$, находим существенную для дальнейшего оценку

$$|L(1, \chi_1 \chi)| < k_1 \ *. \tag{11}$$

Для исключения члена $\zeta(2)$ берем $D_2 < D^{1/3}$, $D_2 \neq D_1$, составляем равенство, аналогичное (10), помножаем его и (10) на соответствую-

* Это простое соображение указано нам проф. Н. Г. Чудаковым.

щие множители и вычитаем одно из другого; тогда получим

$$\left(1-\frac{1}{D_2^2}\right)L(1,\chi_1)\ L(1,\chi_1\chi)-\left(1-\frac{1}{D_1^2}\right)L(1,\chi_2)L(1,\chi_2\chi)=$$

$$=\frac{2\pi}{D_2}\left(1-\frac{1}{D_1^2}\right)\frac{\ln D_2}{\sqrt{D}}-\frac{2\pi}{D_1}\left(1-\frac{1}{D_2^2}\right)\frac{\ln D}{\sqrt{D}}+R_3, \qquad (12)$$

$$|R_3|\leqslant|R_1|+|R_2|.$$

Далее считаем D_1, D_2 фиксированными, $<k_2$, и притом так, что $\chi_1(-1)=\chi_2(-1)=1$ (например, $D_1=5$, $D_2=13$). Тогда известные теоремы теории чисел ([4]) дают

$$L(1,\chi_1\chi)=\frac{\pi}{2\sqrt{DD_1}}H_1,\quad L(1,\chi_2\chi)=\frac{\pi}{2\sqrt{DD_1}}H_2,$$

где H_1 и H_2 — целые рациональные, и, на основании (11),

$$|H_i|<k_3\sqrt{D},\qquad i=1,2. \qquad (13)$$

Далее, если $\alpha_i=t_i+u_i\sqrt{D_i}$ — основные пеллевские единицы полей $K(\sqrt{D_i})$, $i=1,2$, то ([4])

$$L(1,\chi_i)=\frac{h_i\ln\alpha_i}{2\sqrt{D_i}},\quad 0<h_i<k_4,\quad i=1,2.$$

Подставляя эти выражения в (12), сокращая на $\pi/\sqrt{D}$ и помножая на общий целый рациональный знаменатель, придем к неравенству

$$|x_1\ln\alpha_1+x_2\ln\alpha_2+x_3\ln\alpha_3|<e^{-c_3\sqrt{D}},$$

где x_1, x_2, x_3, α_3 — целые рациональные числа; α_1, α_2 — пеллевские единицы; $|x_i|<k_5\sqrt{D}$, $i=1,2$; $|x_3|<k_5$. Этим уясняется связь нашей задачи с теоремой (6) и неравенством (8).

Поступило
15 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. L. Siegel, Math. Z., **10** (1921). [2] K. Mahler, Proc. Koninkl. Acad. te Amsterdam, **39**, No. 5 (1936). [3] M. Deuring, Ann. of Mathematics, **38** (1937). [4] Лежен Дирихле, Лекции по теории чисел, 1936.