Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

И. ГЛАЗМАН

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XI 1948)

В своей известной статье 1940 г. Г. Вейль [1] установил, что уравнение

$$l(y) \equiv -\frac{d}{dt}\left(p\frac{dy}{dt}\right) + qy = \lambda y,$$

где $p(t)$, $q(t)$ непрерывны и $p(t) > 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$, при всех невещественных λ имеет либо о д н о либо д в а линейно независимых решения из $L_2(0, \infty)$. В 1921 г. Виндау, пытаясь обобщить указанный результат Г. Вейля на уравнение вида

$$l(y) \equiv \frac{d^2}{dt^2}\left(p\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \frac{d}{dt}\left(q\frac{dy}{dt}\right) + ry = \lambda y,$$

где $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ непрерывны и $p(t) > 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$, пришел к выводу [2], что такое уравнение при всех невещественных λ имеет либо д в а, либо ч е т ы р е линейно независимых решения из $L_2(0, \infty)$. Позднее, в 1940 г., Д. Шин опубликовал фундаментальную статью ([3], а также [4−6]), посвященную обобщению результатов Г. Вейля и Виндау на уравнения вида

$$l(y) = \lambda y, \tag{1}$$

где $l(y)$ — самосопряженное дифференциальное выражение обобщенного типа (см. [3]) любого порядка.

В этой статье Д. Шин получает следующие результаты:

А. *Число m линейно независимых решений уравнения вида* (1) *порядка* $2n$ *при* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, *принадлежащих* $L_2(0, \infty)$, *удовлетворяет неравенству* $m \geqslant n$.

В. *Имеет место альтернатива: либо* $m = n$, *либо* $m = 2n$.

В 1944 г. Г. Я. Любарский, пытаясь перенести результат В на системы дифференциальных уравнений, обнаружил погрешности в работах Виндау и Шина. В связи с этим возник вопрос о справедливости предложения В (на этот вопрос обратил мое внимание М. Г. Крейн).

В настоящей заметке показано, что результат А Д. Шина может быть получен в качестве простого следствия известной теоремы (см. [7], теорема 29) теории операторов в гильбертовом пространстве, а основной результат В как у Виндау, так и у Шина является ошибочным. Вопреки утверждению В, в заметке показано, что по данным n и m $(n \leqslant m \leqslant 2n)$ можно построить уравнение вида (1) порядка

$2n$ с числом решений из $L_2(0, \infty)$, равным m. Результаты, полученные в настоящей заметке, основаны на некоторых общих соображениях о произведении эрмитовых операторов.

1. Следуя М. Г. Крейну и М. А. Красносельскому [8], назовем $\lambda=\lambda_0$ точкой регулярного типа оператора R, действующего в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, если существует число $k_{\lambda_0}>0$ такое, что при всех $f \in \mathfrak{D}(R)$ ($\mathfrak{D}(R)$ — область определения оператора R) имеет место неравенство

$$\| (R_0-\lambda_0 E) f \| > k_{\lambda_0} \| f \| .$$

Теорема 1. *Пусть R и S — замкнутые эрмитовы операторы с конечными индексами дефекта и точкой регулярного типа $\lambda=0$*. При этих условиях оператор SRS (с областью определения, состоящей из элементов, допускающих последовательное применение операторов S, R, S) является замкнутым эрмитовым оператором с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения и* $\operatorname{Def} SRS = \operatorname{Def} R + 2 \operatorname{Def} S$.

2. Введем в рассмотрение эрмитовы операторы, действующие в $L_2(0, \infty)$ и порожденные квази-дифференциальными выражениями $l(\psi)$ порядка $2n$, определяемыми равенствами (см. [9])

$$\psi^{[0]}=\psi, \quad \psi^{[k]}=\frac{d\psi^{[k-1]}}{dt} \quad (k=1, 2, \ldots, n-1), \quad \psi^{[n]}=p_0\frac{d\psi^{[n-1]}}{dt},$$

$$\psi^{[n+k]}=-\frac{d\psi^{[n+k-1]}}{dt}+p_k\psi^{[n-k]} \quad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad l\psi=\psi^{[n]},$$

где $p_k=p_k(t)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — вещественные измеримые функции, удовлетворяющие условиям $\int\limits_0^a \frac{dt}{|p_0(t)|}<\infty$, $\int\limits_0^b |p_k(t)|\, dt<\infty$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ при любом a $(0\leqslant a<\infty)$. Если функции $p_k(t)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ $n-k$-кратно дифференцируемы, то для $2n$-кратно дифференцируемых функций $\psi(t)$ можно $l(\psi)$ записать в форме (см. [9]):

$$l(\psi)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^k p_{n-k} D^k\psi \qquad \left(D^k=\frac{d^k}{dt^k}\right).$$

Определение. Пусть L — замыкание оператора, определенного на функциях $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям:

а) $\varphi(t)\equiv 0$ при $t>a_\varphi$ $(0\leqslant a_\varphi<\infty)$;

б) $\varphi(t)$, $\varphi^{[1]}(t), \ldots, \varphi^{[2n-1]}(t)$ абсолютно непрерывны;

в) $\varphi(0)=\varphi^{[1]}(0)=\ldots=\varphi^{[2n-1]}(0)=0$

и относящего функции $\varphi(t)$ функцию $l(\varphi)$.

Оператор L естественно назвать минимальным квази-дифференциальным оператором, порожденным l.

Теорема 2. *Сопряженный оператор L^* имеет своей областью определения множество функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям:*

а) *$\psi(t)$, $\psi^{[1]}(t), \ldots, \psi^{[2n-1]}(t)$ абсолютно непрерывны;*

б) *$\psi(t)$ и $l(\psi)$ принадлежат $L_2(0, \infty)$ и $L^*\psi=l\psi$.*

---

* Дефектные числа каждого из операторов R, S равны вследствие наличия вещественной точки регулярного типа [8], они обозначаются соответственно через $\operatorname{Def} R$, $\operatorname{Def} S$.

В силу теоремы 2 число линейно независимых решений уравнения (1), принадлежащих $L_2(0, \infty)$, совпадает с дефектным числом (дефектные числа L равны вследствие вещественности p_{n-k} ($k=0, 1, \ldots, n$)) минимального оператора L, порожденного l. Поэтому предложение А эквивалентно следующей теореме.

Теорема 3. *Дефектное число m квази-дифференциального оператора L порядка $2n$ удовлетворяет неравенству $n \leqslant m \leqslant 2n$.*

Правая часть неравенства непосредственно следует из теоремы 2. Доказательство левой части основано на рассмотрении числа измерений $D(L^*)$ по модулю $\mathfrak{D}(L)$ (см. [7], определение 16).

Для индекса дефекта $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ квази-дифференциального оператора, порожденного квази-дифференциальным выражением любого порядка (см. [3]), точно так же получим $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \geqslant k$.

Ниже, руководствуясь теоремой 1, мы приведем пример дифференциального оператора четвертого порядка с минимальной областью определения и непосредственным вычислением убедимся в том, что его индекс дефекта есть (3, 3), вопреки результату Виндау — Шина.

3. Норму функций $\varphi(t) \in L_2(0, \infty)$ будем обозначать знаком $\|\varphi\|$ в отличие от абсолютной величины $|\varphi(t)|$.

Положим

$$l_4 = pDp(D^2 - 1)pDp \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right),$$

где $p = p(t) = 1 + t$ (таким образом, $\frac{1}{p(t)} \in L_2(0, \infty)$ и $\left\|\frac{1}{p}\right\| = 1$).

Теорема 4. *Число решений уравнения $l_4 y = \lambda y$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ принадлежащих $L_2(0, \infty)$, равно трем.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\lambda = 0$ является точкой регулярного типа оператора L_4, порожденного выражением l_4. Поэтому (см. [8]) достаточно установить, что число решений уравнения $l_4 y = 0$ в классе $L_2(0, \infty)$ равно трем. Нетрудно найти фундаментальную систему решений этого уравнения:

$$y_1(t) = \frac{1}{p(t)}, \quad y_2(t) = \frac{1}{p(t)}\int_0^t \frac{1}{p(s)} e^{-s} ds, \quad y_3(t) = \frac{1}{p(t)}\int_0^t \frac{1}{p(s)} e^{s} ds,$$

$$y_4(t) = \frac{1}{p(t)}\int_0^t \frac{1}{p(s)}\left[e^s \int_0^s \frac{e^{-\tau}}{p(\tau)} d\tau - e^{-s}\int_0^s \frac{e^{\tau}}{p(\tau)} d\tau\right] ds = y_{41}(t) - y_{42}(t).$$

Очевидно,

$$y_1(t) \in L_2(0, \infty), \quad y_2(t) \in L_2(0, \infty), \quad y_3(t) \overline{\in} L_2(0, \infty).$$

Полагая далее

$$\gamma = \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{p(\tau)} d\tau,$$

получим

$$y_{42}(t) = \frac{1}{p(t)}\int_0^t \frac{1}{p(s)} e^{(\theta - 1)s}\left[\int_0^s \frac{d\tau}{p(\tau)}\right] ds \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\ln^2(1+t)}{1+t} \in L_2(0, \infty) \;\; 0 < \theta < 1),$$

$$\gamma y_3(t) - y_{41}(t) = \frac{1}{p(t)} \int_0^t \frac{e^s}{p(s)} \left[\int_s^\infty \frac{e^{-\tau}}{p(s)} d\tau \right] ds =$$

$$= \frac{1}{p(t)} \int_0^t \frac{ds}{p(s)\, p(\tau_s)} < \frac{1}{p(t)} \int_0^t \frac{ds}{p^2(s)} < \frac{1}{p(t)} \in L_2(0, \infty).$$

Следовательно,

$$\gamma y_3(t) - y_4(t) \in L_2(0, \infty).$$

Примечание. Если L_1, L_2 и L — операторы, порожденные самосопряженными квази-дифференциальными выражениями l_1, l_2 и $l = l_1 l_2 l_1$ соответственно, то

$$\operatorname{Def} L \geqslant \operatorname{Def} L_1 L_2 L_1. \tag{2}$$

Теорема 5. *Пусть* $l_1 = -ipDp$, *где* $p = 1 + t$ *и* $l_2 = D^2 - 1$. *При этих условиях минимальный дифференциальный оператор* L *порядка* $2n$, *порождаемый выражением* $l_1^{m-n} l_2^{2n-m} l_1^{m-n}$ $(n \leqslant m \leqslant 2n)$, *имеет индекс дефекта* (m, m).

На основании неравенства (2) для доказательства теоремы 5 достаточно установить, что уравнение $l_1^{m-n} l_2^{2n-m} l_1^{m-n} y = 0$ имеет $2n - m$ линейно независимых решений, лежащих вместе со своей линейной оболочкой (за исключением функции, тождественно равной нулю) вне $L_2(0, \infty)$.

Нетрудно видеть, что такой линейной оболочкой является $2n - m$-мерное пространство функций

$$\varphi(t) = \frac{1}{p(t)} \int_0^t \frac{dt_1}{p^2(t_1)} \cdot \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{p^2(t_2)} \cdots \int_0^{t_{m-n-1}} \frac{P(t_{m-n})}{p(t_{m-n})} e^{t_{m-n}} dt_{m-n},$$

где $P(s)$ — произвольный многочлен степени $2n - m - 1$.

Поступило
18 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., 68 (1910). [2] H. Windau, Math. Ann., 83 (1921). [3] Д. Шин, Математ. сб., 7 (49):3 (1940). [4] Д. Шин, ДАН, 18, № 8 (1938). [5] Д. Шин, ДАН, 28, № 5 (1940). [6] Д. Шин, Математ. сб., 13 (55):1 (1943). [7] J. v. Neumann, Math. Ann., 102 (1929). [8] М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Усп. математ. наук, 2, в. 3 (19) (1947). [9] М. Г. Крейн, Математ. сб., 21 (63):3 (1947).