

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Технология машиностроения»

**Д. Л. Стасенко**

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
для магистрантов специальности 7-06-0714-02  
«Инновационные технологии в машиностроении»  
дневной и заочной форм обучения**

*Учебное электронное издание  
комбинированного распространения*

**Гомель 2024**

УДК 621(075.8)  
ББК 22.1я73  
С77

Рецензент: главный конструктор ОАО «Гомельское специальное конструкторско-техническое бюро гидропневмоавтоматики» *А. А. Гинзбург*

**Стасенко, Д. Л.**

С77

Математическое моделирование технических объектов и процессов : учеб.-метод. пособие для магистрантов специальности 7-06-0714-02 «Инновационные технологии в машиностроении» днев. и заоч. форм обучения / Д. Л. Стасенко. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2024. – 159 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; дисковод CD-ROM ; мышь ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-534-3.

Содержит теоретические основы изучения математического моделирования механизмов, машин и технических систем. Представлены методы, средства моделирования механизмов и агрегатов. Рассмотрены вопросы планирования и анализа экспериментальных исследований с целью получения регрессионных моделей.

Для магистрантов специальности 7-06-0714-02 «Инновационные технологии в машиностроении» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 621(075.8)  
ББК 22.1я73**

**ISBN 978-985-535-534-3**

© Стасенко Д. Л., 2024

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2024

## Оглавление

Глава 1. Структура и параметры объектов моделирования .....	4
Глава 2. Математические модели простых дискретных элементов технических объектов.....	18
Глава 3. Построение теоретических математических моделей на макроуровне.....	51
Глава 4. Структурно-матричный метод формирования математических моделей .....	87
Глава 5. Экспериментальные факторные математические модели .....	90
Глава 6. Оптимизация параметров технических систем.....	134
Литература.....	159

# ГЛАВА 1. СТРУКТУРА И ПАРАМЕТРЫ ОБЪЕКТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

## 1.1. Общие сведения

*Структура* – это упорядоченное множество элементов и их отношений. Технический объект при системном подходе рассматривается как система, состоящая из взаимодействующих элементов, составляющих упорядоченное множество.

Структура технического объекта характеризуется качественным и количественным составом элементов и их взаиморасположением или взаимосвязями. Качественное различие элементов определяется их физическими свойствами. Количественно физические свойства элементов выражаются некоторыми скалярными величинами, называемыми параметрами элементов.

Характеристики функционирования технического объекта зависят от его физических свойств и внешних воздействий окружающей среды. Физические свойства объекта определяются его структурой и параметрами элементов, из которых он состоит. Внешние воздействия зависят от физических свойств внешней среды и характера ее взаимодействия с техническим объектом. Физические свойства внешней среды также определяются ее параметрами.

*Параметр* – это величина, характеризующая свойство или режим работы объекта. Под объектом здесь понимается как отдельный элемент технической системы, так и вся система в целом. Следует отметить, что параметрами технической системы являются *показатели качества и эффективности*: производительность, рабочая скорость, грузоподъемность, удельная материалоемкость, удельная энергоемкость, габариты, масса, показатели надежности, показатели качества переходных процессов и др. Эти параметры называют *выходными параметрами технического объекта*.

Если структура технического объекта определена, то его выходные параметры зависят только от параметров элементов и параметров внешней среды. Различают внутренние и внешние параметры. *Внутренние параметры* – это параметры элементов, из которых состоит технический объект. Например, двигатель и трансмиссия являются элементами автомобиля. Их выходные параметры (и одновременно это внутренние параметры автомобиля) – мощность двигателя, передаточные числа трансмиссии. *Выходные параметры* характеризуют свойства технического объекта, а внутренние параметры – свойства его

элементов. При переходе к новому иерархическому уровню проектирования внутренние параметры могут стать выходными и наоборот.

*Внешние параметры* – это параметры внешней среды, оказывающей влияние на функционирование технического объекта. Например, для автомобиля внешняя среда – дорога и воздушная среда. Параметры дороги включают в себя углы продольного и поперечного уклонов, коэффициенты сопротивления качению и сцепления колес с дорогой. Параметры воздушной среды – плотность и относительная влажность воздуха, скорость и направление ветра.

## 1.2. Объекты проектирования на микроуровне

*Микроуровень* – это нижний иерархический уровень декомпозиции объектов проектирования по степени абстрагирования при составлении математического описания. На этом уровне осуществляется детальное описание физических свойств технического объекта. Объекты рассматриваются как сплошные среды, имеющие конечные области определения, выделяемые в трехмерном геометрическом пространстве. Такие объекты представляют собой *динамические системы с распределенными параметрами*. Их также называют *непрерывными системами*. Функционирование этих систем описывается *дифференциальными уравнениями в частных производных*.

Общий вид уравнений математической модели описания физических свойств технического объекта с распределенными параметрами:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{12}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = 0 \quad (1.1)$$

или в компактной форме:

$$L\varphi(\vec{Z}) = \theta(\vec{Z}), \quad (1.2)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор;  $\varphi$  – искомая функция – фазовая координата;  $x_i$  – пространственные координаты;  $n$  – количество пространственных координат;  $t$  – время;  $Z$  – вектор независимых переменных;  $\theta(Z)$  – известная функция независимых координат.

*Независимыми переменными* в этих моделях являются пространственные координаты  $x_i$ ,  $i=1, n$  и время  $t$ . Фазовая координата – функция независимых переменных.

Размерность задачи определяется числом пространственных координат, где при  $n = 1$  объект одномерный; при  $n = 2$  – двумерный; при  $n = 3$  – трехмерный.

Если уравнение содержит одну фазовую переменную, система описывается одним уравнением вида (1.1), если несколько фазовых переменных (вектор) – системой уравнений.

Если фазовые переменные не являются явными функциями времени, задачу анализа объекта называют *стационарной*, в противном случае – *нестационарной*. Стационарная задача характеризует *статическое состояние* технического объекта. *Динамические режимы* функционирования объекта относятся к нестационарным задачам, и для их оценки требуются исследования *переходных процессов*.

Уравнение (1.1) имеет множество решений. Для получения единственного решения необходимо задать *краевые условия*. Краевые условия включают граничные и начальные условия. *Граничные условия* – это сведения об искомым непрерывных функциях ( $p$  и (или) их производных на границе  $S$  области определения объекта  $\Omega$ , характеризующие условия взаимодействия с окружающей внешней средой. *Начальные условия* – это значения этих же функций во всей области определения в начальный момент времени. Начальные условия задаются только при решении нестационарных задач (при исследовании переходных процессов).

Исходное дифференциальное уравнение в частных производных (1.1) вместе с краевыми условиями носит название *дифференциальной краевой задачи* и представляет собой математическую модель технического объекта с распределенными параметрами.

Существует несколько стандартных способов задания граничных условий. Для теплового объекта, представляющего собой твердое гомогенное (однородное) тело, используют граничные условия первого, второго и третьего родов.

*Граничные условия первого рода* означают задание на границе  $S$  области определения объекта  $\Omega$  значений  $\varphi_s$  искомой функции фазовой переменной  $\varphi$ .

При *граничных условиях второго рода* задают на границе значения частных производных искомой функции по пространственным координатам.

*Граничные условия третьего рода* представляют собой уравнения баланса потоков, характеризующих обмен энергией объекта с окружающей внешней средой.

В некоторых случаях, например, для гетерогенных (неоднородных по составу материала) тепловых объектов могут быть и иные граничные условия.

Состояние объекта характеризуется изменением во времени фазовых координат, определяемых в различных его точках. Задача анализа процесса функционирования технического объекта на микроуровне заключается в определении функций фазовых координат для множества точек, выделенных в области определения объекта.

Объекты с распределенными параметрами могут быть различной физической природы: механические, гидравлические, тепловые, электрические, магнитные и др.

Механические объекты представляют собой элементы и базовые детали машин и механизмов: корпуса, рамы, панели, валы, крылья самолетов, лопасти турбин и др. При анализе механических объектов находят деформации и напряжения. Они определяют несущую способность конструктивных элементов, надежность и нормальные условия функционирования базирующихся на них других элементов объекта.

При проектировании многих технических объектов возникает необходимость анализа тепловых напряжений деталей, выбора оптимальных размеров и конфигурации теплообменников и решения многих других задач теплопередачи. В тепловых объектах определению подлежат температурные поля и термические напряжения.

При анализе гидравлических и пневматических систем определяют режимы течения сплошных потоков жидкостей и газов, характеризующиеся скоростями и давлениями.

Обычно в исходные уравнения (1.1) входят не все фазовые координаты, характеризующие процессы функционирования технического объекта, а только базисные, например, деформации – в модели механической системы, температуры – в тепловой системе и т. д. Остальные фазовые координаты (например, напряжения в упомянутых системах) определяют через базисные координаты на основе уравнений, устанавливающих между ними соответствующие связи.

### **1.3. Основы построения математических моделей на микроуровне**

Для построения математических моделей технических объектов с распределенными параметрами используют фундаментальные физические законы. К ним относятся прежде всего законы сохранения (массы, энергии, количества движения).

Общая формулировка закона сохранения: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через его поверхность с учетом скорости генерации или уничтожения субстанции в этом объеме.

Уравнение, соответствующее данной формулировке, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} + G, \quad (1.3)$$

где  $\varphi$  – фазовая переменная (координата), выражающая субстанцию;  $\operatorname{div} \vec{j}$  – дивергенция вектора  $\vec{j}$ ;  $\vec{j}$  – вектор плотности потока фазовой переменной;  $G$  – скорость генерации или уничтожения субстанции.

У трехмерного технического объекта вектор  $\vec{j}$  состоит из трех составляющих, направленных параллельно осям декартовой системы координат  $x, y, z$ , т. е.  $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$ . Дивергенция вектора  $\vec{j}$  – скалярная величина, определяемая выражением

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}. \quad (1.4)$$

Дивергенция вектора плотности потока характеризует сумму притока-стока субстанции через поверхность элементарного объема. В качестве субстанции в различных физических законах выступают масса, энергия, количество движения и др.

*Уравнение закона сохранения массы:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_\rho, \quad (1.5)$$

где  $\rho$  – плотность массы, кг/м<sup>3</sup>;  $\vec{j}_\rho$  – вектор плотности потока массы:

$$\vec{j}_\rho = \rho \vec{v}, \quad (1.6)$$

где  $\vec{v}$  – вектор скорости переноса массы.

Уравнение (1.5) в гидроаэродинамике называют *уравнением неразрывности*.

В одномерном случае, когда скорость направлена лишь вдоль оси  $x$ , уравнение (1.5) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}. \quad (1.7)$$



Плотность потока массы  $j_p = \rho v$  измеряется в  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

*Уравнение закона сохранения энергии:*

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_E + G_E, \quad (1.8)$$

где  $E = e + v^2/2$  – полная энергия единицы массы;  $e$  – внутренняя энергия единицы массы;  $\rho E$  – энергия единицы объема,  $\text{Дж}/\text{м}^3$ ;  $\vec{j}_E$  – вектор плотности потока энергии;  $G_E$  – скорость генерации или поглощения энергии в единице объема,  $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ .

В одномерном случае поток энергии направлен только вдоль оси  $x$ , тогда  $J_E = J_{Ex}$ , а уравнение (1.8) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = \frac{\partial j_{Ex}}{\partial x} + G_{Ex}. \quad (1.9)$$

Плотность потока энергии измеряется в  $\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

*Уравнение закона сохранения количества движения* используют при моделировании движения потока жидкости. Для потока идеальной жидкости (без учета сил трения, обусловленных вязкостью) уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = -\vec{v} \text{div}(\rho \vec{v}) - \text{grad } p, \quad (1.10)$$

где  $\rho \vec{v}$  – вектор количества движения единицы объема жидкости;  $p$  – давление жидкости;  $\text{grad } p$  – градиент давления.

*Градиентом* называют векторную функцию скалярного аргумента. Компонентами вектора градиента являются частные производные аргумента по пространственным координатам. Градиент давления:

$$\text{grad } p = \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

Для одномерного потока жидкости получаем

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.11)$$

При учете массовых сил и сил трения уравнение закона сохранения количества движения имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = G_M - \left( \frac{\text{grad } p - \eta \nabla^2 \vec{v} - \eta \text{grad div } \vec{v} / 3}{\rho} \right), \quad (1.12)$$

где  $G_M$  – напряженность поля массовых сил;  $\eta$  – динамическая вязкость;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа:

$$\nabla^2 \vec{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \vec{i}} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2 \vec{j}} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2 \vec{k}}.$$

Выражение (1.12) называют *уравнением Навье–Стокса*.

#### 1.4. Модели гидравлических систем на микроуровне

В технических системах широкое применение находят гидравлические и пневматические приводы. При большой длине гидравлических или пневматических магистралей в них возникают волновые процессы, исследование которых возможно на основе непрерывных моделей, использующих дифференциальные уравнения в частных производных.

Основные физические свойства жидкостей и газов – текучесть, сжимаемость и непрерывность потока. Текучесть оценивается вязкостью, сжимаемость – модулем объемной упругости.

Все применяемые на практике жидкости и газы представляют собой обычные *ньютоновские вязкие среды*. В такой среде при взаимных перемещениях ее элементов возникают силы внутреннего трения. Напряжения трения в ньютоновской жидкости пропорциональны относительным скоростям, или скоростям сдвига.

Жидкости обычно имеют сравнительно большую вязкость и слабую сжимаемость. Газы, наоборот, отличаются малой вязкостью и высокой сжимаемостью. Математическое описание физических свойств жидкостей и газов на микроуровне можно выполнить на основе одних и тех же законов. Поэтому в дальнейшем будем говорить о жидкостной сплошной среде.

Движение жидкости в трубопроводе обычно рассматривают как одномерный сплошной поток. При этом положение поперечного сечения потока относительно начала отсчета геометрической координаты, выбираемого на левой граничной поверхности трубопровода, определяется одной координатой  $x$ . Значение  $x$  не зависит от кривизны осевой линии трубопровода, а равно ее длине от начала отсчета до рассматриваемого сечения.

Для описания движения жидкости используют закон сохранения массы и закон сохранения количества движения.

Закон сохранения массы выражает свойство непрерывности потока жидкости в трубопроводе и для одномерного случая имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Уравнение Навье–Стокса в одномерном случае, выражающее закон сохранения количества движения элементарной массы, согласно (1.12), имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = G_M - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (1.14)$$

При анализе движения жидкости в трубопроводе обычно массовыми силами пренебрегают. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (1.15)$$

Находит применение также приближенная форма уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2\zeta}{\rho} v, \quad (1.16)$$

где  $\zeta$  – коэффициент линеаризованного вязкого трения в трубопроводе.

Иногда при исследованиях пренебрегают вязкостью жидкости. Принимая  $\eta = 0$  в выражении (1.15), получаем уравнение Эйлера для одномерного потока в трубопроводе постоянного сечения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.17)$$

Уравнение Эйлера учитывает лишь инерционные свойства потока, а уравнение Навье–Стокса – инерционные и диссипативные (рассеивание энергии) свойства.

Уравнения (1.13) и (1.15) сведем в единую систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Уравнения (1.18) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями: скорости  $v$ , давления  $p$  и плотности  $\rho$ . Чтобы сделать систему определенной, необходимо в нее добавить уравнение связи между  $p$  и  $\rho$ .

Будем предполагать, что поток жидкости изолированы от притока тепла извне. Такой процесс движения жидкости называют *адиабатическим*. Характерная его особенность – постоянство энтропии. Следовательно, адиабатический процесс является изоэнтропическим.

Для газа в рассматриваемом случае плотность можно выразить через давление на основании уравнения состояния:

$$\frac{p}{\rho} = RT = \frac{k-1}{k} h, \quad (1.19)$$

где  $R$  – газовая постоянная;  $T$  – температура;  $k$  – показатель адиабаты:  $k = C_p/C_V$ , где  $C_p$  и  $C_V$  – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и постоянном объеме, соответственно.

В пневматических приводах большинства технических объектов в качестве рабочего тела используют воздух. Параметры воздуха при  $T = 273,15$  °К и  $p_0 = 1$  Па:  $\rho = 1,293$  кг/м<sup>3</sup>;  $C_p = 1,006 \cdot 10^3$  Дж/(кг · °К);  $C_V = 0,718 \cdot 10^3$  Дж/(кг · °К);  $k = 1,405$ .

Следует также учитывать зависимость динамической вязкости от температуры. Обычно используют степенную зависимость вида

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{T_0}{T} \right)^n. \quad (1.20)$$

Показатель степени  $n$  для воздуха при температуре от 90 до 300 °К равен  $-0,889$ , а при температуре  $T = 300-400$  °К –  $n = 0,75$ .

Эта же формула годится и для рабочих жидкостей, используемых в гидроприводах. В температурном интервале  $303 \leq T \leq 423$  °К принимают  $n \leq 2,77$ .

Зависимость плотности от давления для жидкостей представляется следующим обобщенным уравнением изоэнтропы:

$$\frac{p + B}{\rho^n} = \text{const}. \quad (1.21)$$

При проектировании машиностроительных гидроприводов часто принимают линейную аппроксимацию зависимости изменения давления от относительного изменения объема жидкости при ее сжатии. Эта зависимость устанавливается *законом Гука* и в одномерном случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -E \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.22)$$

где  $E$  – модуль объемной упругости жидкости, который при адиабатическом процессе определяется выражением  $E_a = V dp / dV$ ;  $V$  – объем жидкости.

Учитывая слабую сжимаемость рабочих жидкостей гидроприводов, полагают  $\rho = \text{const}$  и для анализа полей скоростей и давлений в трубопроводе используют систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -E \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Значение модуля объемной упругости зависит от типа жидкости, давления, температуры, скорости деформации и характера термодинамического процесса. Наибольшее влияние на него оказывает давление, поэтому для минеральных масел обычно используют линеаризованную зависимость:

$$E_a = E_{a0} + A_a p. \quad (1.24)$$

Коэффициент пропорциональности  $A_a$  зависит от типа жидкости и ее температуры. Так, для жидкости АМГ-10 при  $T = 293$  °К  $E_{a0} = 1,68 \cdot 10^3$  МПа;  $A_0 = 12,75$ .

Реальная жидкость в гидроприводах обычно представляет собой двухфазную газожидкостную смесь. Воздух в этой смеси может находиться в растворенном и нерастворенном состоянии. Растворенный воздух практически не влияет на свойства рабочих жидкостей. Нерастворенный воздух содержится в жидкости в виде пузырьков. Вследствие значительно большей сжимаемости воздуха по сравнению со сжимаемостью жидкости модуль объемной упругости газожидкостной двухфазной смеси уменьшается, причем это уменьшение является существенным при малых давлениях.

Для определения модуля объемной упругости газожидкостной смеси  $E_c$  используется приближенное выражение

$$E_c = \frac{\varepsilon_B \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}} + (1 - \varepsilon_B) A_a \sqrt{\frac{E_{a0} + A_a p_0}{E_{a0} + A_a p}}}{\frac{\varepsilon_B \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}}}{kp} + \frac{(1 - \varepsilon_B)}{E_{a0} + A_a p}}, \quad (1.25)$$

где  $\varepsilon_B$  – относительный объем газовой фазы в смеси;  $k$  – показатель адиабаты сжатия воздуха;  $p_0$  – давление, при котором определен модуль объемной упругости  $E_{a0}$  (обычно принимают избыточное давление  $p_0 = 0$ ).

Для минеральных масел, используемых в машиностроительных гидроприводах, параметры находятся в следующих пределах:  $E_{a0} = (1,35-1,92) \cdot 10^3$  МПа;  $A_a = 12-13$ ;  $\varepsilon_B = 0,005-0,006$ ;  $k = 1,4$ .

Распределенные модели используются при анализе высокочастотных колебаний в системах гидравлических и пневматических приводов. Для решения систем уравнений (1.17) и (1.23) необходимо задать краевые условия. Обычно принимают граничные условия первого рода и задают функции давлений и скоростей на левой и правой границах участка трубопровода:

$$\left. \begin{array}{l} p = \varphi_1(t), \\ v = \varphi_2(t) \end{array} \right\} \text{ при } x = 0 \text{ и } x = L, \quad (1.26)$$

где  $L$  – длина участка трубопровода.

Начальными условиями являются значения этих же функций в начальный момент времени  $t_0 = 0$  во всех контролируемых точках трубопровода. Если функции (1.26) не зависят от времени, процесс движения жидкости в трубопроводе будет стационарным. Его характеристики зависят только от граничных условий. Начальные условия задаются для исследования нестационарных (переходных) процессов, обусловленных переменными внешними воздействиями, определяемыми функциями (1.26).

## 1.5. Модели механических систем на микроуровне

Технический уровень изделий машиностроения в значительной мере определяется рациональным выбором геометрических параметров входящих в их состав механических элементов. Форма и размеры элементов, их взаимное расположение, в конечном счете, определяют важнейшие параметры технического объекта – его массу и габариты, показатели надежности и долговечности.

Для решения задачи выбора геометрических параметров технического объекта необходим анализ напряженно-деформированного состояния его элементов. Значения напряжений и деформаций позволяют оценить прочность, долговечность, виброустойчивость конструктивных элементов и осуществить поиск их оптимальных размеров и конфигурации.

Примеры объектов проектирования: валы двигателей и трансмиссий, корпуса, рамы, панели и стержневые конструкции автомобилей, самолетов, станков, кораблей и др.

Современные методы анализа напряженно-деформированного состояния несущих элементов различных технических систем базируются на использовании моделей с распределенными параметрами. В основе построения таких моделей лежит теория упругости. Динамические модели различных элементов технических объектов сводятся к стержневым, пластинчатым, оболочечным или объемным системам, находящимся под действием произвольных механических нагрузок (сосредоточенных, распределенных, детерминированных, случайных и др.). Эти модели представляют собой динамические системы с распределенными параметрами, функционирование которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных.

Математической моделью анализа напряженно-деформированного состояния элемента механической системы является *основное уравнение теории упругости – уравнение Ламе*. Это уравнение выводится из условия динамического равновесия твердого тела под действием приложенных к нему сил, включая и силу инерции.

Выделим в твердом теле элементарный параллелепипед (рис. 1.1).

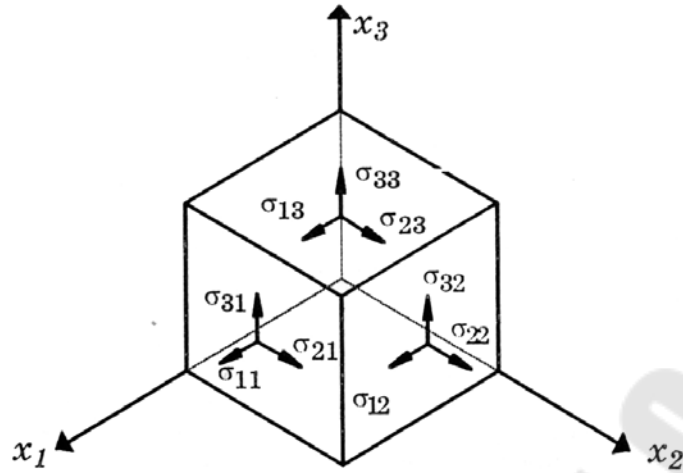


Рис. 1.1. Компоненты напряжений на гранях элементарного параллелепипеда

Сформулируем условия его равновесия: геометрическая сумма сил, приложенных к выделенному элементарному параллелепипеду, включая его силу инерции, равна нулю. При этом учитываются распределенные нагрузки на гранях параллелепипеда и массовая сила. Распределенные нагрузки представляются нормальными  $\sigma_{ii}$  и касательными  $\sigma_{ij}$  напряжениями.

Учитывая закон о парности касательных напряжений, согласно которому  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ , получаем уравнения равновесия в проекциях на оси  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.27)$$

где  $\rho$  – плотность материала твердого тела;  $U_i$  – перемещение элемента вдоль оси  $x_i$ ,  $\sigma_{ij}$  – напряжение, действующее в направлении оси  $x_i$  в грани элемента, перпендикулярной оси  $x_j$ ;  $\rho g_i$  – проекция вектора массовых сил  $\rho \vec{g}$  на ось  $x_i$ ;  $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения.

Напряжения  $\sigma_{ij}$  связаны с деформациями  $\varepsilon_{ij}$ , а последние – с перемещениями  $U_i$ . В случае линейной связи между ними, устанавливаемой законом Гука, для анизотропного тела имеем:

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad (1.28)$$



$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \text{ при } i \neq j, \quad (1.29)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – деформация, вычисляемая по формуле

$$\varepsilon_{ij} = 0,5 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \quad (1.30)$$

$\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства среды:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad (1.31)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.32)$$

где  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Заменяя напряжения на деформации в уравнениях равновесия (1.27), получаем основное уравнение теории упругости, называемое уравнением Ламе:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \vec{U} + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{g}, \quad (1.33)$$

где  $\vec{U}$  – вектор перемещений;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Модели для анализа напряжений и деформаций часто оказываются более удобными, если представлены в интегральной форме, вытекающей из вариационных принципов механики. Вариационный принцип Лагранжа (принцип потенциальной энергии) гласит, что потенциальная энергия системы получает стационарные значения на тех кинематически возможных перемещениях, отвечающих заданным граничным условиям, которые удовлетворяют условиям равновесия. Поэтому модель представляют в виде выражения потенциальной энергии  $E_{\Pi}$  системы как разности энергии деформации  $E_d$  и работы  $W$  массовых и приложенных поверхностных сил:

$$E_{\Pi} = E_d - W,$$

где  $E_d = 0,5 \int_{\vec{R}} \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} d\vec{R}$ ;  $\vec{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23})$  – вектор-строка деформаций;  $\vec{\sigma} = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23})$  – вектор-столбец напряжений;  $\vec{R}$  – область определения искомой функции.

Введем матрицу

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Используя матрицу (1.34), уравнения (1.28) и (1.29) можно записать в лаконичной форме:

$$\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon}. \quad (1.35)$$

При использовании принципа Лагранжа вместо решения уравнения (1.33) требуется минимизировать функционал:

$$E_{\Pi} = 0,5 \int_{\vec{R}} \vec{\varepsilon}^T D \vec{\varepsilon} d\vec{R} - W. \quad (1.36)$$

## ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОСТЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

### 2.1. Объекты проектирования на макроуровне

На макроуровне осуществляют проектирование различных машин и механизмов. Объекты проектирования рассматриваются как сложные технические системы, состоящие из совокупности взаимодействующих элементов. Таким образом, в отличие от микроуровня, где объектами проектирования были детали машин (валы, корпуса, панели), на макроуровне объект имеет сложную неоднородную структуру, состоящую из элементов – объектов проектирования микроуровня.

На микроуровне использовались математические модели, представляемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Эти модели универсальны, дают наиболее полное описание физических свойств и позволяют решать любые задачи анализа технического объекта. Однако они чрезвычайно сложны даже для отдельного элемента машины или механизма и требуют значительных затрат времени на проведение анализа. Если рассматривать каждый элемент объекта макро-

уровня как сплошную среду, т. е. как динамическую систему с распределенными параметрами, то это делает практически нереальным решение задач оптимизации структуры и параметров объекта.

Вместе с тем многие задачи проектирования успешно решаются с использованием более простых математических моделей. Эти модели можно получить путем аппроксимации распределенных моделей микроуровня на основе соответствующих допущений относительно представления структуры и физических свойств объекта. При этом динамическая система с распределенными параметрами путем дискретизации в пространственных координатах представляется совокупностью материальных объектов, выделенных из сплошной среды, – дискретных элементов с постоянными усредненными параметрами. Такую систему называют *динамической системой с сосредоточенными параметрами*.

Дискретный элемент в общем случае обладает инерционными, упругими и диссипативными свойствами (внутренние свойства системы). Различают простые и сложные элементы. *Простой элемент* наделен только одним из упомянутых физических свойств, а *сложный* – более чем одним.

Основанием для дискретизации является наличие выраженного дискретного спектра собственных частот колебаний системы в ограниченном диапазоне (например, для механических систем – до 300 Гц). Дискретные системы оказываются вполне пригодными для анализа колебательных процессов в этом диапазоне частот.

*Математическая модель динамической системы с сосредоточенными параметрами* – система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, объекты проектирования на макроуровне рассматриваются как системы, состоящие из совокупности взаимодействующих дискретных элементов. Задача проектирования таких объектов состоит в определении оптимальных параметров и структуры, исходя из заданного описания внешней среды и технических требований к объекту.

## **2.2. Динамическая модель технического объекта на макроуровне**

Построение математической модели технического объекта осуществляется на основе его динамической модели. *Динамическая модель* – это абстрактное графическое отображение основных физиче-

ских свойств технического объекта и характеристик взаимодействия с внешней средой.

При построении динамической модели следует принимать во внимание лишь те физические свойства объекта и воздействия внешней среды, которые могут оказать существенное влияние на точность результатов исследования моделируемого процесса функционирования объекта. Такой подход позволит избежать необоснованной избыточности в его математическом описании. Но при этом должна быть обеспечена адекватность математической модели.

На этапе построения математической модели микроуровня в инвариантной форме динамическая модель объекта проста. Она представляет собой графическое изображение области определения объекта  $\Omega$  соответствующей конфигурации, определяемой граничной поверхностью  $S$ , посредством которой осуществляется взаимодействие объекта с внешней средой. Во многих случаях достаточно вербального описания динамической модели. Необходимость построения динамической модели микроуровня возникает лишь при разработке алгоритмической модели.

При построении математической модели макроуровня в инвариантной форме почти всегда необходима разработка динамической модели. Это объясняется тем, что *структура динамической модели макроуровня* гораздо сложнее. Она представляется в виде совокупности взаимодействующих дискретных элементов, и ее сложность зависит от степени абстрагирования при отображении физических свойств объекта.

На макроуровне для выделения дискретных элементов из сплошной среды используют методы сеток, функционально законченных элементов и сосредоточенных масс.

*Методы сеток* подразделяют на метод *конечных разностей* и *метод конечных элементов*. Они обычно используются при построении алгоритмической модели на микроуровне в процессе алгебраизации дифференциальных уравнений в частных производных, но могут применяться и для построения математической модели макроуровня путем аппроксимации модели микроуровня.

*Метод функционально законченных элементов* основан на выделении типовых элементов технического объекта, завершенных в конструктивном отношении и предназначенных для выполнения определенных функций (например, в гидромеханической системе – участок гидромагистрالی, золотниковый клапан, дроссель, обратный клапан,

насос, гидромотор и др.). Имея библиотеку математических моделей функционально законченных элементов и зная структуру технического объекта, можно составить полную математическую модель.

Наиболее часто при построении динамической модели используют *метод сосредоточенных масс*. Этот метод применим, если система имеет явно выраженный дискретный спектр собственных частот. Это характерно для технических объектов, у которых масса распределена в пространстве неравномерно. Например, в механической системе автомобиля масса вращающихся деталей в основном сосредоточена в маховике двигателя, крупных шестернях трансмиссии, барабанах стояночного тормоза, колесах, имеющих большие радиальные размеры и обладающих большими моментами инерции, а соединяющие их детали (валы, муфты, карданные передачи) имеют малые радиальные размеры и массу, но обладают существенными упругими свойствами. Из названия метода следует, что он предназначен для моделирования технических объектов, мерой инертности элементов которых служит масса.

При построении динамической модели методом сосредоточенных масс выделяют некоторые абстрактные материальные субстанции, наделяя их определенными физическими свойствами. Такими субстанциями являются сосредоточенные массы (материальные точки и абсолютно твердые тела), эквивалентные массам соответствующих частей технического объекта, и элементы, лишенные массы (невесомые), отображающие характер взаимодействия сосредоточенных масс.

*Сосредоточенные массы* обладают инерционными свойствами и способностью накапливать кинетическую энергию. Их называют *инерционными элементами*.

Взаимодействие сосредоточенных масс осуществляется посредством упругих, диссипативных, фрикционных и трансформаторных элементов.

*Упругие элементы* отображают упругие свойства динамической системы. Они обладают способностью накапливать потенциальную энергию.

*Диссипативные элементы* отображают свойства диссипации (рассеивания) энергии конструктивными элементами технического объекта, обусловленные силами внутреннего трения, пропорциональными относительной скорости перемещения взаимодействующих сосредоточенных масс (или сосредоточенных масс относительно внешней среды, например, при движении жидкости в трубопроводе).

*Фрикционные элементы* отображают физические свойства фрикционных механизмов технического объекта.

*Трансформаторные элементы* отображают безынерционные преобразования параметров потока энергии, осуществляемые техническими устройствами, называемыми трансформаторами.

Следует отметить, что рабочие процессы трансформаторов в общем случае могут быть весьма сложными, в особенности если происходит преобразование одного вида энергии в другой. В таком случае необходима более детальная математическая модель трансформатора. Здесь же речь идет о тех случаях, когда внутренними процессами трансформатора можно пренебречь и учитывать лишь пропорциональные изменения величины выходных фазовых переменных по отношению к величине переменных на его входе без преобразования вида энергии.

Состояние сосредоточенных масс характеризуется *фазовыми координатами типа потока*. Обычно это *геометрические координаты*, позволяющие определять положение сосредоточенных масс в многомерном фазовом пространстве, либо скорости движения сосредоточенных масс в этом пространстве. В последнем случае фазовые координаты типа потока составляют только часть координатного базиса, в состав которого кроме переменных типа потока входят переменные типа потенциала, характеризующие состояние упругих элементов.

О координатном базисе моделей макроуровня подробнее будет сказано в последующих разделах. Здесь же отметим, что в механике фазовые координаты типа потока выбирают в качестве обобщенных координат. *Количество независимых обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы*. В общем случае не все введенные фазовые переменные типа потока будут независимыми. *Переменные же типа потенциала* всегда принадлежат к зависимым координатам и выражаются через переменные типа потока.

Направления фазовых координат типа потока выбирают таким образом, чтобы они отражали положительное направление потока передаваемой через техническую систему энергии внешних источников. При этом также учитываются ограничения, наложенные объектами внешней среды на свободу перемещения сосредоточенных масс. Направления фазовых координат типа потока должны быть отображены в динамической модели системы.

Ограничения на изменения геометрических координат и скоростей движения сосредоточенных масс динамической системы называ-

ют связями. Различают следующие связи: *геометрические (позиционные)* и *кинематические; удерживающие и недерживающие (виртуальные)*; *стационарные и нестационарные; голономные и неголономные*. Математическое описание ограничений дается уравнениями связей. Каждое уравнение связи отображает тот факт, что данная связь лишает материальную систему одной степени свободы. При этом соответственно уменьшается количество независимых координат системы.

Если в динамической модели выбрать только такие независимые фазовые координаты, которые отображают лишь перемещения сосредоточенных масс, допускаемые позиционными удерживающими связями, то необходимость составления и использования уравнений этих связей исключается. Сложное движение твердого тела при этом раскладывается на простейшие составляющие – поступательное и вращательное.

При моделировании технического объекта с виртуальными и неголономными связями уравнения этих связей включаются в состав математической модели.

Для обозначения элементов в динамических моделях применяют графические изображения, используемые в кинематических и принципиальных схемах.

Например, используя метод сосредоточенных масс, нужно построить динамическую модель для анализа плавности хода автомобиля.

В связи с неровностями дороги движение автомобиля сопровождается колебаниями кузова и вибрацией его механизмов и деталей. Для того чтобы создать нормальные условия работы водителю, комфортные условия пассажирам, обеспечить сохранность перевозимого груза и нормальное функционирование механизмов и систем автомобиля, применяют систему поддрессоривания (подвеску автомобиля). Эта система содержит упругие элементы и амортизаторы. Энергия толчков и ударов, возникающих на неровностях дороги, преобразуется в потенциальную энергию деформации упругих элементов подвески, вследствие чего обеспечиваются плавные колебательные движения кузова. Амортизаторы поглощают и рассеивают энергию колебаний, значительно уменьшая амплитуды резонансных колебаний. Упругими свойствами обладают и пневматические шины колес автомобиля при их радиальной деформации. В результате поддрессоренная масса кузова и неподдрессоренные массы колес и мостов представляют собой многомассовую колебательную систему.

Адекватное описание физических свойств системы поддресоривания позволяет провести анализ колебаний и выбрать оптимальные параметры упругих и диссипативных элементов подвески.

При движении автомобиля кузов можно рассматривать как твердое тело с шестью степенями свободы, совершающее линейные колебательные движения относительно трех ортогональных осей, проведенных через его центр масс, и вращательные движения относительно этих же осей (рис. 2.1, *a*). Перемещения колес при колебаниях зависят от кинематической схемы направляющих устройств подвески. Различают зависимую и независимую подвески колес. Если колеса непосредственно закреплены на несущей балке моста, движения их оказываются взаимосвязанными и подвеску называют зависимой. В этом случае мост вместе с колесами может перемещаться вертикально и вращаться относительно продольной оси автомобиля. Могут быть и другие направления движения, определяемые кинематикой подвески, однако перемещения в этих направлениях обычно незначительны и ими во многих случаях пренебрегают. При зависимой подвеске мост вместе с колесами можно рассматривать как твердое тело с двумя степенями свободы. При независимой подвеске колес обычно учитывают только их вертикальные перемещения.

Во многих случаях при моделировании зависимой подвески вместо одного твердого тела, совершающего вращательное и поступательное движения, принимают модель с двумя независимыми твердыми телами, совершающими только вертикальные перемещения, аналогично схеме с независимой подвеской колес.

Динамическая модель колебательной системы автомобиля с учетом изложенных представлений о физических свойствах системы поддресоривания приведена на рис. 2.1, *a*. Она имеет 10 степеней свободы. В практических задачах часто ограничиваются моделированием только трех движений кузова: поступательного вдоль оси  $z$  и вращательных относительно осей  $x$  и  $y$ , т. е. учитывают три степени свободы кузова. Тогда динамическая модель автомобиля представляет собой колебательную систему с семью степенями свободы.

Внешние воздействия на эту систему создаются неровностями микро- и макропрофиля дороги. Эти воздействия носят случайный характер и описываются случайными функциями  $q(t)$ .

Рассмотренная динамическая модель приводит к довольно сложной математической модели, и ее использование при проектировании требует больших затрат времени. Поэтому на ранних этапах проектирования применяют более простые динамические модели.



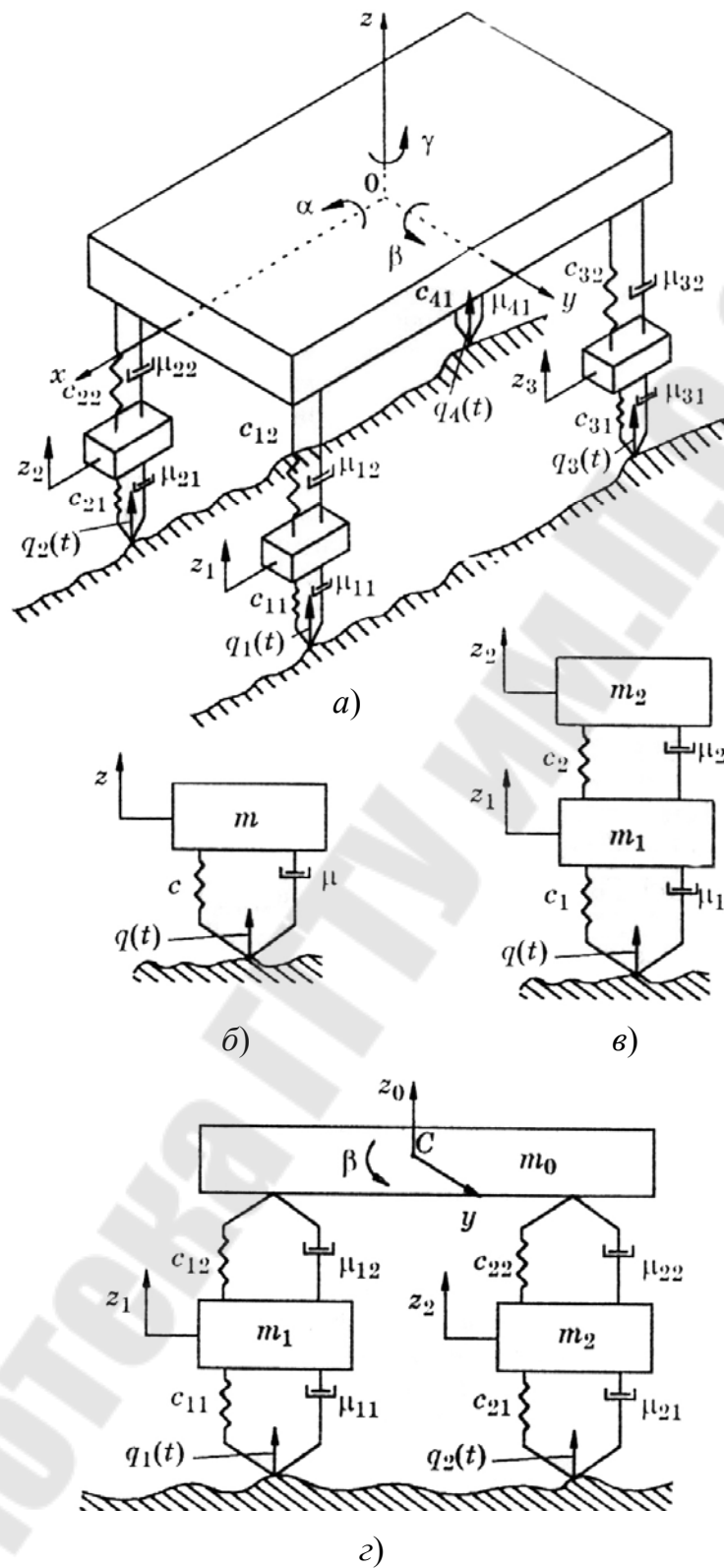


Рис. 2.1. Динамические модели для анализа плавности хода автомобиля:

- a* – динамическая модель колебательной системы автомобиля;
- б* – одномассовая динамическая модель; *в* – двухмассовая динамическая модель; *г* – динамическая модель плоских колебаний

Для предварительного выбора параметров подвески используют одномассовую динамическую модель, пренебрегая массой колес и мостов (рис. 2.1, б). При этом принимают во внимание, что у существующих автомобилей параметры колебаний передней и задней частей кузова слабо связаны между собой. В этой связи постулируют допущение о несвязанности этих колебаний. Масса  $m$  представляет собой часть массы кузова, нагружающей колеса данного моста. Таким образом, динамическая модель в данном случае представляет совокупность инерционного, упругого и диссипативного элементов, находящихся под воздействием функции микропрофиля дороги  $q(t)$ . Параметром упругого элемента является коэффициент жесткости  $c$ , учитывающий упругие свойства подвески и пневматической шины, а параметром диссипативного элемента – коэффициент сопротивления  $\mu$ , учитывающий потери энергии в гидравлическом амортизаторе и шине при ее деформировании.

Одномассовая динамическая модель не учитывает колебаний колес. Парциальная частота колебаний колес обычно в 6–10 раз выше парциальной частоты колебаний кузова. Вследствие этого колебания колес могут вызывать вибрации элементов конструкции кузова и расположенных в нем приборов и механизмов. Кроме того, при проектировании должны быть найдены рациональные соотношения между параметрами упругих и диссипативных элементов подвески и шин. В этой связи возникает необходимость использования двухмассовой динамической модели (рис. 2.1, в). В этой модели учитывается масса части кузова  $m_2$ , приходящаяся на колеса данного моста, масса колес и моста  $m_1$ , коэффициенты жесткости упругих элементов подвески  $C_2$  и шины  $C_1$ , коэффициенты сопротивления диссипативных элементов подвески  $\mu_2$  и шины  $\mu_1$ . С учетом наложенных позиционных связей на сосредоточенные массы  $m_1$  и  $m_2$  они могут перемещаться только вертикально вдоль осей, соответственно,  $z_1$  и  $z_2$ . Следовательно, система имеет 2 степени свободы.

Однако для более детального анализа влияния параметров подвески на колебания кузова необходимо учитывать связанность колебаний. Кроме того, возникает необходимость оценки колебаний механизмов и приборов, расположенных в различных местах кузова. В этом случае приходим к динамической модели плоских колебаний (рис. 2.1, г), в которой учитываются не только вертикальные колебания кузова относительно оси  $z_0$ , но и угловые продольные колебания  $\beta$  относительно оси  $y$ . Колебательная система имеет четыре сте-

пени свободы и ее состояние определяется фазовыми координатами  $z_0, \beta, z_1, z_2$ . Аналогичная модель используется при исследовании поперечных колебаний кузова.

Таким образом, в зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технического объекта получают различные динамические модели.

В заключение еще раз подчеркнем необходимость обоснованного подхода к выбору моделей на различных этапах проектирования, постепенного их усложнения при приближении к заключительному этапу. Необходимость использования большого количества разнообразных моделей в процессе проектирования одного и того же технического объекта обуславливает актуальность автоматизации их формирования.

### 2.3. Компонентные и топологические уравнения

Физические свойства технического объекта в динамической модели макроуровня отображаются совокупностью взаимодействующих дискретных элементов. В зависимости от способа построения динамической модели каждый элемент может наделяться одним или несколькими физическими свойствами. При дискретизации методом функционально законченных элементов или сеточными методами элементы обычно обладают несколькими физическими свойствами и являются сложными. В методе сосредоточенных масс все элементы простые, так как каждый из них наделен только одним физическим свойством.

В данной главе рассматриваются только простые дискретные элементы.

Состояние простого элемента характеризуется *одной фазовой переменной типа потока и одной переменной типа потенциала*. Физическое свойство элемента описывается математической моделью, выражающей зависимость между этими фазовыми переменными. Это выражение называют *компонентным уравнением*.

Основные физические свойства технических объектов любой физической природы – *инерционные, упругие и диссипативные*. Они отображаются в динамических моделях, соответственно, инерционными, упругими и диссипативными элементами. Фрикционные и трансформаторные элементы отображают специфические свойства, характерные не для всех технических объектов. Математическое описание этих

свойств может быть различным, в зависимости от физической природы технического объекта.

Компонентные уравнения дискретных элементов могут быть получены аппроксимацией моделей микроуровня или непосредственным использованием физических законов.

Аппроксимация моделей микроуровня осуществляется путем замены всех частных производных фазовых переменных по пространственным координатам отношениями конечных разностей. Например, производную  $d\varphi/dx$  заменяют выражением

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l_x},$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – значения фазовой переменной  $\varphi$  на границах дискретного элемента (в узлах 1 и 2 дискретизации сплошной среды);  $l_x$  – длина дискретного элемента вдоль оси  $x$ .

Значения параметров элементов, выделяемых из сплошной среды с распределенными параметрами, усредняют.

Для математического описания физических свойств элементов могут быть также использованы физические законы. Компонентные уравнения, полученные на основе физических законов, имеют следующий вид:

– для инерционного элемента:

$$U_{\text{И}} = \text{И} d \frac{I_{\text{И}}}{dt}; \quad (2.1)$$

– для диссипативного элемента:

$$U_{\text{Д}} = \text{Д} I_{\text{Д}}; \quad (2.2)$$

– для упругого элемента:

$$U_{\text{У}} = \text{У} \int I_{\text{У}} dt. \quad (2.3)$$

В уравнениях (2.1)–(2.3) приняты следующие обозначения: И, Д, У – параметры инерционного, диссипативного и упругого элементов, соответственно;  $I$  – фазовая переменная типа потока;  $U$  – фазовая переменная типа потенциала. Индексы при фазовых переменных  $I$  и  $U$  указывают на принадлежность их соответствующим элементам.

Для получения полной математической модели технической системы необходимо объединить все компонентные уравнения элементов в общую систему уравнений. Объединение осуществляется на

основе физических законов, выражающих условия равновесия и непрерывности фазовых переменных. Уравнения этих законов называют топологическими уравнениями. Они описывают характер взаимодействия между простыми элементами, устанавливая соотношения между однотипными фазовыми переменными.

Условия равновесия записываются для фазовых переменных типа потенциала:

$$\sum_i U_i = 0, \quad (2.4)$$

а условия непрерывности – для фазовых переменных типа потока:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (2.5)$$

Форма компонентных и топологических уравнений одинакова для систем различной физической природы.

Если фазовые переменные – векторные величины, то направления векторов учитываются только топологическими уравнениями, а в компонентных уравнениях их направления не учитываются. Компонентные уравнения (2.1)–(2.3) в этом случае устанавливают соотношения лишь между модулями фазовых переменных. Это позволяет обеспечить корректное описание взаимодействия элементов системы в полной математической модели.

Топологическое уравнение для векторных переменных формулируются как равенство нулю геометрической суммы соответствующих фазовых координат, а для скалярных – равенство нулю алгебраической суммы этих координат.

Полная математическая модель технического объекта на макроуровне, составленная на основе компонентных уравнений, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Искомые функции в этих уравнениях являются базисные фазовые координаты  $I$  и  $U$ , а независимой переменной – время  $t$ . Размерность математической модели определяется общим порядком системы дифференциальных уравнений (или числом базисных координат). Эту модель обычно представляют в нормальной форме Коши, в которой все уравнения разрешены относительно первых производных фазовых координат  $dI/dt$  и  $dU/dt$ . Координатный базис в этом случае составляют фазовые переменные типа потока  $I$  и типа потенциала  $U$ .

Состояние сосредоточенных масс определяется фазовыми координатами типа потока. Количество таких координат соответствует числу степеней свободы динамической модели объекта.

## 2.4. Компонентные и топологические уравнения механической системы

Сосредоточенные массы, отображаемые на динамических моделях механических систем, в силу учитываемых позиционных связей, могут совершать только простейшие виды движений – поступательное и вращательное, либо сложное движение, которое представляется сочетанием этих простейших видов.

Поступательное движение твердого тела характеризуется линейной скоростью  $v$  и силой  $F$ , а вращательное – угловой скоростью  $\omega$  и вращающим моментом  $M$ . Они и принимаются в качестве фазовых переменных механической системы: *фазовые переменные типа потока* – скорости  $v$ , м/с и  $\omega$ , рад/с; *фазовые переменные типа потенциала* – сила  $F$ , Н и вращающий момент  $M$ , Н · м.

Параметром инерционного элемента при поступательном движении является масса  $m$ , кг, а при вращательном движении – момент инерции  $J$ , кг · м<sup>2</sup>.

Параметр диссипативного элемента – коэффициент сопротивления  $\mu$ , называемый также коэффициентом неупругого сопротивления, коэффициентом вязкого трения, коэффициентом демпфирования. При поступательном движении он измеряется в Н · с/м, а при вращательном – Н · м · с/рад.

Параметр упругого элемента – коэффициент жесткости  $c$ . При поступательном движении в качестве единицы измерения  $c$  используется – Н/м, а при вращательном – Н · м/рад.

*Компонентное уравнение инерционного элемента* получают на основе второго закона Ньютона. Для поступательного движения твердого тела уравнение имеет следующий вид:

$$F_{\text{И}} = m \frac{dv_{\text{И}}}{dt}, \quad (2.6)$$

а для вращательного

$$M_{\text{И}} = J \frac{d\omega_{\text{И}}}{dt}, \quad (2.7)$$

где  $F_{\text{И}}$ ,  $M_{\text{И}}$  – сила инерции и момент сил инерции (или инерционный момент) элемента, соответственно;  $v_{\text{И}}$ ,  $\omega_{\text{И}}$  – скорости инерционного элемента.

Скорости  $v_{И}$  и  $\omega_{И}$  представляют собой абсолютные скорости сосредоточенных масс, соответственно, при поступательном и вращательном движениях. Если твердое тело совершает сложное движение, то для каждого вида движения составляется свое компонентное уравнение инерционного элемента.

Математическое описание *диссипативного элемента* основано на использовании закона Ньютона для вязкого трения. При поступательном движении компонентное уравнение имеет следующий вид:

$$F_{Д} = \mu v_{Д}, \quad (2.8)$$

а при вращательном:

$$M_{Д} = \mu \omega_{Д}, \quad (2.9)$$

где  $F_{Д}$ ,  $M_{Д}$  – сила и момент вязкого трения, соответственно;  $v_{Д}$ ,  $\omega_{Д}$  – скорости диссипативных элементов.

Согласно закону Гука, сила упругости деформируемого механического элемента пропорциональна величине деформации:

$$F_{У} = c\Delta,$$

где  $\Delta$  – деформация элемента:  $\Delta = x_1 - x_2$ ;  $x_1$ ,  $x_2$  – перемещения узлов дискретизации 1 и 2 (или выделенных сосредоточенных масс).

Выражая перемещения  $x$  через фазовые переменные  $v$  или  $\omega$ , получаем следующие *компонентные уравнения упругих элементов*:

– при поступательном движении:

$$F_{У} = c \int v_{У} dt; \quad (2.10)$$

– при вращательном движении:

$$M_{У} = c \int \omega_{У} dt, \quad (2.11)$$

где  $F_{У}$ ,  $M_{У}$  – сила и момент упругих элементов, соответственно;  $v_{У}$  или  $\omega_{У}$  – скорости деформации упругих элементов.

Упругие и диссипативные элементы в динамической модели соединяют между собой сосредоточенные массы (рис. 2.1). В этой связи скорости этих элементов  $v_{У}$ ,  $\omega_{У}$ ,  $v_{Д}$ ,  $\omega_{Д}$  представляют собой относительные скорости соединяемых ими сосредоточенных масс:

$$v_{Уj} = v_i - v_{i+1},$$

где  $v_{y_j}$  – скорость деформации  $j$ -го упругого элемента;  $v_{dk}$  – скорость  $k$ -го диссипативного элемента;  $v_i, v_{i+1}$  – скорости  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й сосредоточенных масс (твердых тел), соединяемых  $j$ -м упругим и  $k$ -м диссипативным элементами.

Скорости упругих и диссипативных элементов при вращательном движении твердых тел определяются аналогичными выражениями.

Силы  $F_{и}, F_{у}, F_{д}$  и моменты  $M_{и}, M_{у}, M_{д}$  инерционных, упругих и диссипативных элементов характеризуют их взаимодействия в динамической модели. Они представляют собой *внутренние силы системы*.

При движении системы под действием приложенных к ней внешних сил и моментов происходит изменение ее кинетической и потенциальной энергий, а часть энергии затрачивается на преодоление сил трения. Инерционные элементы динамической модели отображают свойство системы накапливать кинетическую энергию, упругие элементы – свойство накапливать потенциальную энергию, а диссипативные – рассеивать энергию потерь на трение путем превращения механической энергии в тепловую.

*Первое топологическое уравнение* является уравнением равновесия. Оно выражает принцип Даламбера: геометрическая сумма всех сил, приложенных к твердому телу, включая силу инерции, равна нулю:

$$\sum_i \bar{F}_i = 0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) соответствует поступательному движению твердого тела. При вращательном движении используется уравнение

$$\sum_i \bar{M}_i = 0. \quad (2.13)$$

*Второе топологическое уравнение* определяет условие непрерывности фазовых координат типа потока. Оно выражает принцип сложения скоростей при сложном движении твердого тела: геометрическая сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю:

$$\sum_K \bar{v}_K = 0; \quad (2.14)$$

$$\sum_K \bar{\omega}_K = 0. \quad (2.15)$$

Количество составляемых топологических уравнений вида (2.12) и (2.13) равно числу степеней свободы моделируемой системы.



Если компонентные уравнения (2.6)–(2.11) записать в векторной форме, то в правых частях необходимо поставить знак минус. Это обусловлено тем, что сила инерции  $\bar{F}_И$  и инерционный момент  $\bar{M}_И$  направлены противоположно соответствующим ускорениям  $d\bar{v}_И/dt$  и  $d\bar{\omega}_И/dt$ , сила и момент трения  $\bar{F}_Д$  и  $\bar{M}_Д$  противоположны относительным скоростям сосредоточенных масс  $\bar{v}_Д$  и  $\bar{\omega}_Д$ , а сила и момент упругих элементов  $\bar{F}_У$  и  $\bar{M}_У$  противоположны вектору деформации  $\bar{\Delta}$  (или, соответственно, относительным скоростям деформации  $\bar{v}_У$  и  $\bar{\omega}_У$ ). Однако, компонентные уравнения при использовании метода сосредоточенных масс следует записывать без учета знаков фазовых координат, а их знаки необходимо учитывать лишь в топологических уравнениях.

## 2.5. Компонентные и топологические уравнения гидравлической системы

В гидравлической системе фазовыми переменными типа потока являются расходы  $Q$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ), а типа потенциала – давления  $p$  ( $\text{Н}/\text{м}^2 = \text{Па}$ ).

При выводе компонентных уравнений используем уравнения Эйлера, Навье–Стокса и Гука, полученные для одномерной системы с распределенными параметрами.

Для перехода к модели с сосредоточенными параметрами осуществим аппроксимацию моделей микроуровня путем замены частных производных фазовых переменных по пространственным координатам отношениями конечных разностей.

*Уравнение Эйлера* для трубопровода постоянного сечения:

$$\frac{dv}{dt} = -\rho^{-1} \frac{dp}{dx}, \quad (2.16)$$

где  $v$  – скорость потока жидкости в трубопроводе;  $\rho$  – плотность жидкости;  $x$  – геометрическая координата.

Разделим трубопровод на ряд участков длиной  $l$  и заменим частную производную  $dp/dx$  отношением конечной разности:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{(p_1 - p_2)}{l} = -\frac{p}{l}, \quad (2.17)$$

где  $p_1, p_2$  – давления в узлах дискретизации 1 и 2, т. е. на границах выделенных участков трубопровода. Здесь учтено, что градиент дав-

ления вдоль трубопровода  $grad p = \partial p / \partial x$  отрицателен (давление падает по мере удаления от источника).

Расход жидкости в трубопроводе  $Q$  выразим через скорость потока  $v$ :

$$Q = Av, \quad (2.18)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения трубопровода.

Подставим значения  $\partial p / \partial x$  из (2.17) и  $v$  из (2.18) в уравнение (2.16) и найдем выражение для определения  $p$ :

$$p = \frac{\left(\frac{\rho l}{A}\right) dQ}{dl}.$$

Введем обозначение:

$$m_\Gamma = \frac{pV}{A^2} = \frac{m_{\text{ж}}}{A^2}, \quad (2.19)$$

где  $m_\Gamma$  – коэффициент массы ( $\text{кг}/\text{м}^4$ );  $V$  – объем жидкости в выделенном участке трубопровода длиной  $l$ :  $V = Al$ ;  $m_{\text{ж}}$  – масса жидкости в этом участке.

С учетом (2.19) уравнение Эйлера (2.16) после дискретизации приводится к следующему виду:

$$p_{\text{И}} = \frac{m_\Gamma dQ_{\text{И}}}{dt}. \quad (2.20)$$

Сопоставляя (2.20) с выражением (2.1), приходим к выводу, что уравнение Эйлера отображает только инерционные свойства жидкости.

Рассмотрим *линеаризованное уравнение Навье–Стокса*:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-r^{-1} \partial p}{\partial x} - \left(\frac{2\zeta}{\rho}\right)v, \quad (2.21)$$

где  $\zeta$  – коэффициент линеаризованного вязкого трения жидкости.

Учитывая выражения (2.17) и (2.18), получаем

$$\rho = \left(\frac{rl}{A}\right) \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{2\zeta l}{A}\right) Q.$$

Введем обозначение:

$$\mu_{\Gamma} = 2 \left( \frac{\zeta l}{A} \right) = \frac{2\zeta V}{A^2}, \quad (2.22)$$

где  $\mu_{\Gamma}$  – коэффициент гидравлического сопротивления ( $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^5$ ).

С учетом выражений (2.19) и (2.22) уравнение Навье–Стокса после дискретизации приводится к следующему виду:

$$p = \frac{m_{\Gamma} dQ}{dt} + \mu_{\Gamma} Q. \quad (2.23)$$

Из выражения (2.23) следует, что *уравнение Навье–Стокса отображает инерционные и диссипативные свойства жидкости*. В этом случае  $p = p_{\text{И}} + p_{\text{Д}}$ , где  $p_{\text{Д}}$  – величина потерь давления на преодоление трения при движении потока жидкости в трубопроводе, а  $p_{\text{И}}$  – затраты давления на разгон жидкости. Полагая  $p_{\text{И}}$  и  $p_{\text{Д}}$  аддитивными величинами, выделим инерционный и диссипативный элементы участка трубопровода. Компонентное уравнение инерционного элемента соответствует выражению (2.20), а диссипативного элемента имеет следующий вид:

$$p_{\text{Д}} = \mu_{\Gamma} Q_{\text{Д}}. \quad (2.24)$$

Уравнение Гука:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -E \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.25)$$

позволяет учесть *упругие свойства жидкости*. Выразим скорость потока  $v$  через расход  $Q$  по формуле (2.18) и получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = A^{-1} \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Заменим  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  отношением конечной разности:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{(Q_1 - Q_2)}{l} = -\frac{Q_{\text{У}}}{l}, \quad (2.26)$$

где  $Q_1$ ,  $Q_2$  – расходы в узлах дискретизации трубопровода 1 и 2;  $Q_{\text{У}}$  – изменение расхода, обусловленное сжимаемостью жидкости. В выра-

жении (2.26) учтено, что при возрастании давления происходит увеличение объемной деформации жидкости, и величина расхода жидкости при удалении от источника уменьшается.

На основе уравнения (2.25) с учетом выражения (2.26) найдем выражение для определения давления упругого элемента, полагая  $E$  не зависящим от  $p$ :

$$p_y = \frac{E}{Al} \int Q_y dt. \quad (2.27)$$

Введем обозначение:

$$c_\Gamma = E(Al)^{-1} = \frac{E}{V}, \quad (2.28)$$

где  $c_\Gamma$  – коэффициент гидравлической жесткости, Н/м<sup>5</sup>;  $E$  – модуль объемной упругости жидкости, Н/м<sup>2</sup>.

В результате получаем *компонентное уравнение упругого элемента гидравлической системы*:

$$p_y = c_\Gamma \int Q_y dt. \quad (2.29)$$

Фазовые переменные  $p_{\text{И}}$ ,  $p_y$ ,  $p_{\text{Д}}$  представляют собой *внутренние потенциалы исследуемой гидравлической системы*, характеризующие взаимодействие выделенных дискретных элементов и определяющие потери давления источника на преодоление сил инерции жидкости и сообщение ей кинетической энергии, на деформацию жидкости и изменение ее потенциальной энергии, а также на преодоление сил внутреннего трения жидкости.

Коэффициенты  $m_\Gamma$ ,  $c_\Gamma$  и  $\mu_\Gamma$  являются параметрами, соответственно, инерционных, упругих и диссипативных элементов гидравлической системы.

Топологические уравнения имеют следующий вид:

$$\sum_i p_i = 0; \quad (2.30)$$

$$\sum_K Q_K = 0. \quad (2.31)$$

Первое уравнение выражает *условие равновесия потенциалов*, действующих на сосредоточенные массы, а второе – *условие непрерывности потоков жидкости*.

Например, на основе метода сосредоточенных масс необходимо построить динамическую модель гидравлической магистрали.

При построении динамической модели гидравлической магистрали ее разделяют на ряд участков и выделяют в них простые дискретные элементы – инерционные, диссипативные и упругие (рис. 2.2). Упругие элементы гидравлической системы должны учитывать не только сжимаемость жидкости, но и деформируемость трубопровода. Определение  $c_{\Gamma}$  с учетом упругих свойств газожидкостной смеси и трубопроводов рассмотрено ранее.

Фрагмент динамической модели гидравлической магистрали после ее дискретизации представлен на рис. 2.2. Модель содержит две сосредоточенные массы, характеризуемые коэффициентами масс  $m_{\Gamma 1}$  и  $m_{\Gamma 2}$ , два диссипативных элемента, обозначенных в виде постоянных дросселей с коэффициентами гидравлических сопротивлений  $\mu_{\Gamma 1}$  и  $\mu_{\Gamma 2}$ , и один упругий элемент с коэффициентом гидравлической жесткости  $c_{\Gamma}$ , отображаемый в гидравлических схемах в виде гидроаккумулятора. Внешние воздействия на систему представлены в виде источников потенциалов  $p_{B1}$  и  $p_{B2}$  – давлений источника и потребителя.

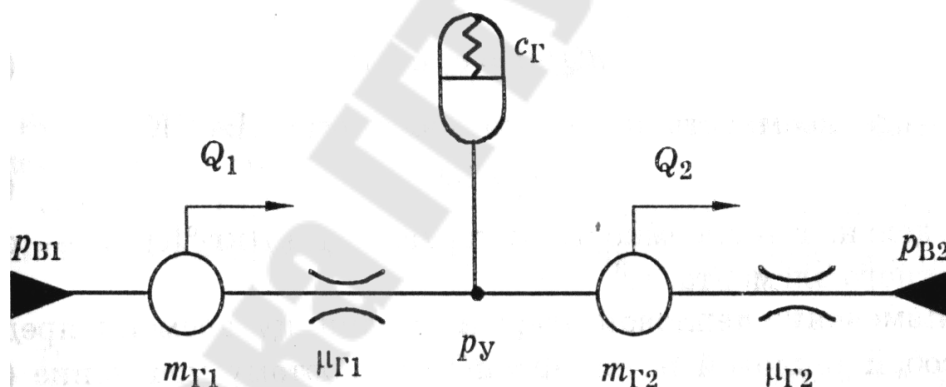


Рис. 2.2. Динамическая модель гидравлической магистрали

Из рис. 2.2 следует, что фазовые переменные типа потока  $Q_{и1}$  и  $Q_{д1}$ , характеризующие состояния инерционных и диссипативных элементов, равны абсолютным расходам жидкости в выделенных участках гидромагистрали  $Q_1$  и  $Q_2$ , т. е. равны фазовым координатам сосредоточенных масс. Отсюда следует, что потери давления  $p_{Д}$  на преодоление сил внутреннего трения жидкости, определяемые уравнением (2.24), зависят от абсолютной скорости жидкости в трубопроводе.

Фазовая переменная типа потока  $Q_y$  упругого элемента равна разности расходов жидкости в смежных участках трубопровода:

$$Q_y = Q_1 - Q_2.$$

## **2.6. Определение параметров элементов динамических моделей технических объектов**

### **2.6.1. Определение параметров элементов динамических моделей механической системы**

Параметры инерционных элементов – массы  $m$  и моменты инерции  $J$  и упругих элементов – коэффициенты жесткости  $c$  определяют по известным формулам теоретической механики.

Параметры диссипативных элементов – коэффициенты сопротивлений  $\mu$  можно найти, используя априорную информацию об относительных коэффициентах затухания колебаний  $\gamma$  (коэффициентах апериодичности). Значения  $\gamma$  обусловлены трением в конструктивных элементах технической системы, возникающим в результате их деформации и взаимных микроперемещений сочлененных деталей. Влияние трения в материале для металлических конструкций обычно во много раз меньше, чем трения в сочленениях деталей. В деталях, изготовленных из полимеров (резина, пластмасса), трение значительно больше, чем в аналогичных металлических деталях (значение  $\gamma$  примерно в 100 раз выше). В зависимости от конструктивного исполнения технической системы упругие элементы ее динамической модели могут отображать как отдельные сплошные (неделимые) детали, обладающие сравнительно небольшой жесткостью (например, пружины, длинные валы), так и целый ряд сочлененных деталей. В этой связи величина  $\gamma$  колеблется в значительных пределах –  $\gamma = 0,03-1,0$ . Для гашения колебаний применяют специальные демпфирующие элементы (резиновые муфты, гидравлические амортизаторы), позволяющие значительно увеличить  $\gamma$  и снизить амплитуды колебаний.

Коэффициент сопротивления  $\mu_j$   $j$ -го диссипативного элемента механической системы зависит не только от  $\gamma_j$ , но и от параметров элементов динамической модели, непосредственно примыкающих к данному диссипативному элементу. При определении значений  $\mu_j$ , используют парциальные системы.

Парциальной системой называется частичная одночастотная подсистема, выделяемая из динамической модели технического объекта. Она имеет только одну частоту собственных колебаний, называемую *собственной парциальной частотой*. На рис. 2.3 показаны динамические модели парциальных систем объектов механической природы с вращательным движением сосредоточенных масс.

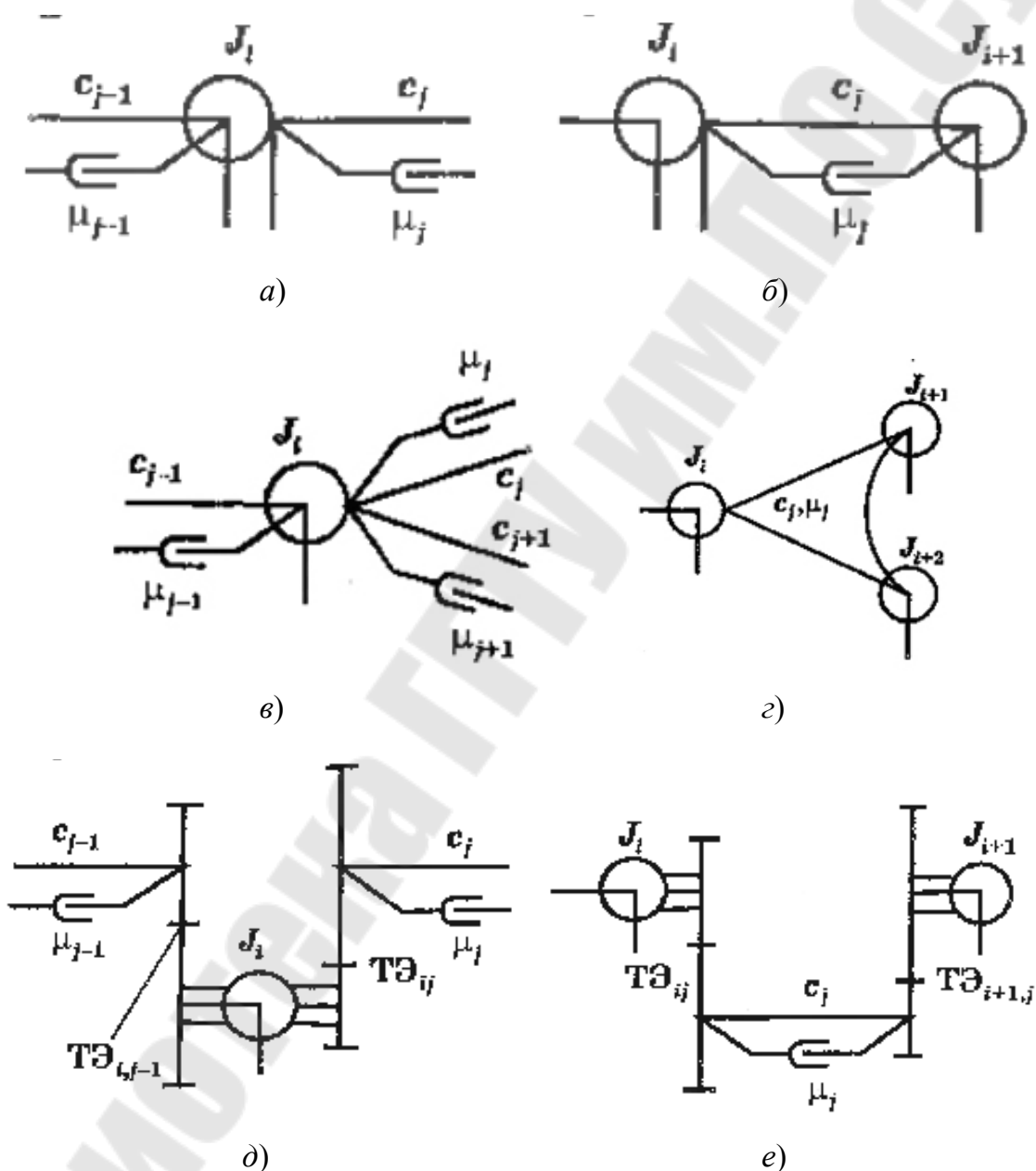


Рис. 2.3. Динамические модели парциальных систем:  
 а, в, д – с инерционным базовым элементом; б, г, е – с упругим базовым элементом

Особенность структуры парциальной системы состоит в том, что она содержит один базовый элемент и некоторое множество взаимодействующих с ним элементов с иными физическими свойствами по сравнению с базовым элементом. На рис. 2.3, *а, в, д* базовым является инерционный элемент с параметром  $J_i$ , а на рис. 2.3, *б, г, е* – упругий элемент с параметром  $c_j$ . Парциальные системы, показанные на рис. 2.3, *а, б*, называют простыми, а на рис. 2.3, *в–е* – сложными.

Собственная парциальная частота определяется без учета диссипативных элементов. Это частота свободных незатухающих колебаний парциальной системы. Для системы с инерционным базовым элементом она вычисляется по формуле

$$\omega_i = \sqrt{\sum_{j=1}^K \frac{c_j^*}{J_i}},$$

а для системы с упругим базовым элементом

$$\omega_j = \sqrt{\frac{c_j}{J_j^*}},$$

где  $c_j^*$  – приведенный к  $i$ -му инерционному базовому элементу коэффициент жесткости  $j$ -го упругого элемента;  $K$  – количество упругих элементов, входящих в парциальную систему;  $J_j^*$  – параметр эквивалентного приведенного инерционного элемента, кинетическая энергия которого равна сумме кинетических энергий всех инерционных элементов парциальной системы.

Рассмотрим вначале парциальные системы с инерционным базовым элементом (рис. 2.3, *а, в, д*). Необходимость определения параметра  $c_j^*$  возникает при наличии в парциальной системе трансформаторных элементов, что характерно для системы на рис. 2.3, *д*. Значение параметра  $c_j^*$  определяется из условия равенства потенциальных энергий исходного упругого элемента с параметром  $c_j$  и приведенного упругого элемента с параметром  $c_j^*$ . Если упругий элемент расположен на входе инерционного элемента, как  $c_{j-1}$  на рис. 2.3, *д*, то приведенный коэффициент жесткости этого элемента  $c_{j-1}^*$  получа-



ют умножением  $c_{j-1}$  на квадрат передаточного числа  $u_{i,j-1}$  трансформаторного элемента ТЭ<sub>*i,j-1*</sub>, а если на выходе, то делением:

$$c_{j-1}^* = c_{j-1} u_{i,j-1}^2, \quad c_j^* = \frac{c_j}{u_{i,j}^2}.$$

Вход и выход базового элемента определяются по направлению передаваемого через динамическую систему потока энергии. Передаточное число трансформаторного элемента равно отношению скорости па его входе к скорости на выходе.

При отсутствии трансформаторных элементов (рис. 2.3, *а, в*) частота свободных незатухающих колебаний определяется:

$$\omega_i = \sqrt{\sum_{j=1}^K \frac{c_j}{J_i}},$$

Рассмотрим определение параметра  $J_j^*$  для парциальных систем с упругим базовым элементом. При отсутствии трансформаторных элементов (рис. 2.3, *б, з*):

$$J_j^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{J_i}},$$

где  $N$  – количество инерционных элементов, входящих в парциальную систему.

Если же парциальная система содержит трансформаторные элементы (рис. 2.3, *е*), то в последнюю формулу вместо  $J_i$  необходимо подставлять приведенные к упругому базовому элементу моменты инерции  $J^*$ . Значение  $J^*$  определяется из условия равенства кинетических энергий исходного инерционного элемента с параметром  $J_i$  и приведенного с параметром  $J_i^*$ . Если инерционный элемент расположен на входе базового упругого элемента, то  $J_i$  умножают на квадрат передаточного числа трансформаторного элемента, а если на выходе, тогда делят. Для парциальной системы на рис. 2.3, *е*

$$J_i^* = J_i u_{ij}^2; \quad J_{i+1}^* = \frac{J_{i+1}}{u_{i+1,j}^2}.$$

Рассмотрим парциальные системы с трансформаторными элементами (рис. 2.4).

Пусть энергия в системе (рис. 2.4, а) передается от массы  $m_1$  к массе  $m_2$  или (рис. 2.4, б) от массы  $J_1$  к массе  $J_2$ . Обе системы имеют по два трансформаторных элемента ТЭ<sub>1</sub> и ТЭ<sub>2</sub>.

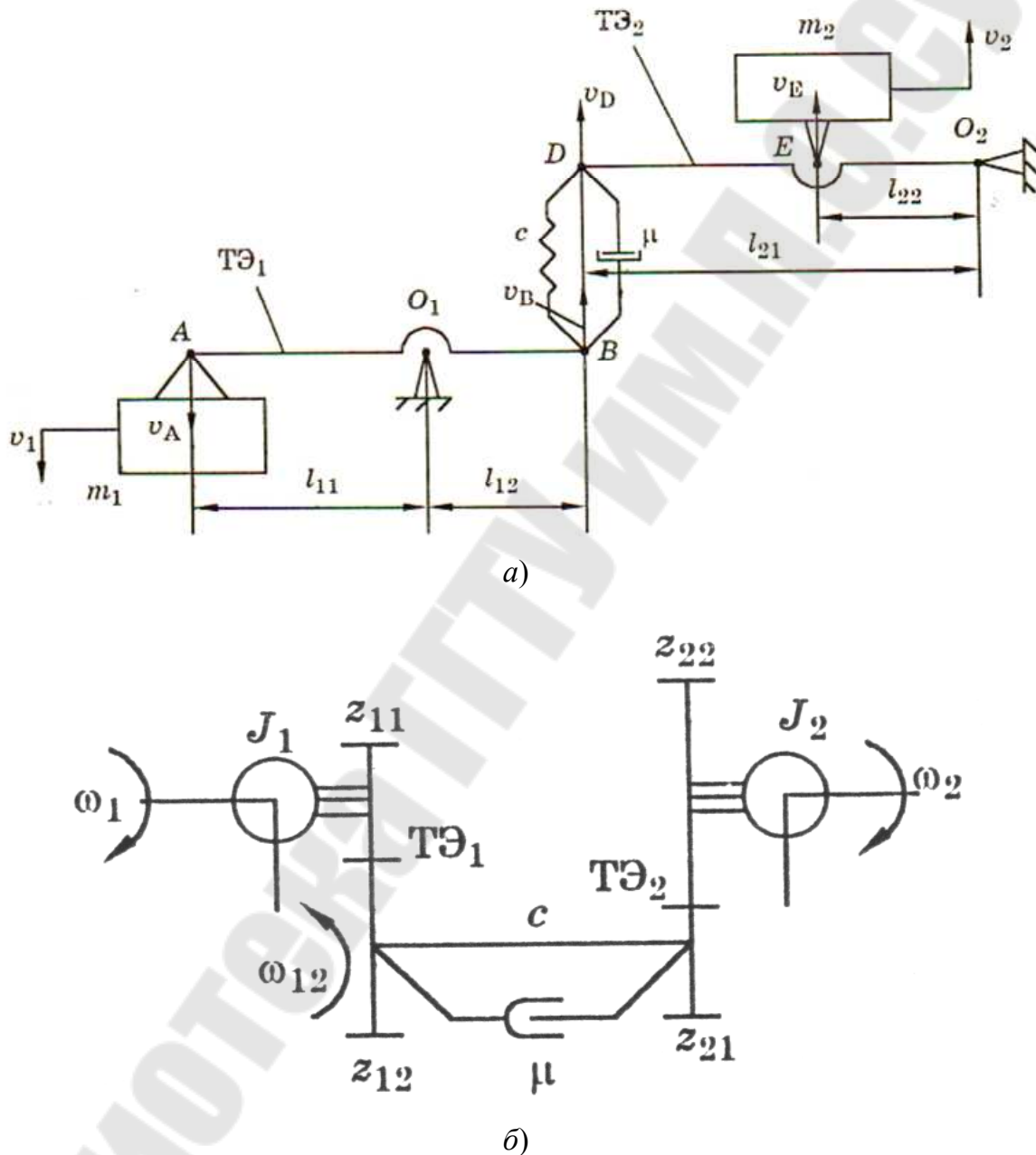


Рис. 2.4. Парциальные системы с трансформаторными элементами ТЭ<sub>1</sub> и ТЭ<sub>2</sub>:

а – поступательная; б – вращательная

В поступательной системе (рис. 2.4, а) трансформаторные элементы отображают рычажные передачи. Передаточное число  $TЭ_1$  найдем через отношение скоростей точек  $A$  и  $B$ , а передаточное число  $TЭ_2$  – скоростей точек  $D$  и  $E$ :

$$u_1 = \frac{v_A}{v_B} = -\frac{l_{11}}{l_{12}}; \quad u_2 = \frac{v_D}{v_E} = \frac{l_{21}}{l_{22}}.$$

Так как  $TЭ_1$  расположен на входе в упругий элемент, а  $TЭ_2$  – на его выходе, то значение  $m^*$  вычислим по формуле

$$m^* = \frac{m_1 u_1^2 m_2 (u_2^2)^{-1}}{m_1 u_1^2 + \frac{m_2}{u_2^2}}.$$

Аналогично определяется  $J^*$  для парциальной вращательной системы (рис. 2.4, б):

$$J^* = \frac{J_1 u_1^2 J_2 (u_2^2)^{-1}}{J_1 u_1^2 + \frac{J_2}{u_2^2}},$$

где  $u_1$  и  $u_2$  – передаточные числа  $TЭ_1$  и  $TЭ_2$ , отображающие зубчатые передачи:

$$u_1 = \frac{\omega_1}{\omega_{12}} = -\frac{z_{12}}{z_{11}}; \quad u_2 = \frac{\omega_{12}}{\omega_2} = -\frac{z_{22}}{z_{21}},$$

где  $z_{ij}$  – числа зубьев передач.

При определении параметров диссипативных элементов используются парциальные системы с упругим базовым элементом. Значение  $\mu_j$  определяется по формуле:

$$\mu_j = 2\gamma_j J_j^* \omega_j.$$

Таким образом при поступательном движении твердых тел (рис. 2.4, а) в формулы вместо моментов инерции  $J_i$  и  $J_j$  подставляются значения масс  $m_i$  и  $m_j^*$ . На рис. 2.5 показан пример выделения парциальной системы с упругим базовым элементом  $c_j$  из динамической модели механической поступательной системы.

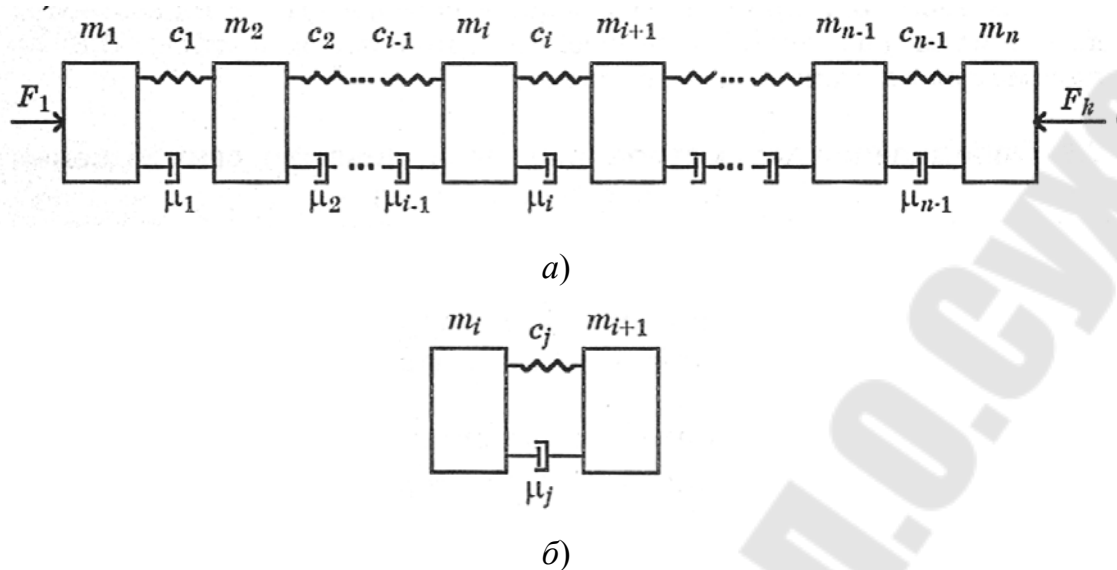


Рис. 2.5. Динамическая модель:  
 а – механической поступательной системы;  
 б – выделенная из нее парциальная система

### 2.6.2. Определение параметров элементов динамических моделей гидравлической системы

Если при дискретизации гидравлической магистрали выделенные участки трубопровода имеют постоянное сечение, то параметры инерционных элементов  $m_{\Gamma}$  определяют по формуле (2.19).

Если же какой-либо участок трубопровода имеет сложную конфигурацию и состоит из нескольких частей различного поперечного сечения, тогда используется формула:

$$m_{\Gamma} = \rho \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{A_i^2},$$

где  $V_i$  – объем  $i$ -й части участка трубопровода;  $A_i$  – площадь поперечного сечения этой части;  $n$  – число частей.

Компонентное уравнение диссипативного элемента гидравлической системы, получено на основе линеаризованного уравнения Навье–Стокса и имеет следующий вид:

$$p_{\text{Д}} = \mu_{\Gamma} Q_{\Gamma} = \mu_{\Gamma} A v,$$

где  $v$  – скорость потока жидкости в трубопроводе.

В реальной гидравлической системе трение носит более сложный, нелинейный характер. Значение  $\mu_{\Gamma}$  зависит от режима движения жидкости в трубопроводе. Различают два режима: *ламинарный* и *тур-*

*булентный*. Переход от ламинарного к турбулентному наступает при определенных условиях, характеризующихся *числом Рейнольдса*:

$$Re = \frac{vd}{\nu},$$

где  $d$  – диаметр трубопровода, м;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости ( $\text{м}^2/\text{с}$ , при температуре  $T = 323 \text{ }^\circ\text{К}$  для моторного масла  $\nu = 62 \cdot 10^{-4}$ , а для масла АУП  $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ ).

При  $Re < 2300$  режим движения жидкости *ламинарный*. Потери давления по длине трубопровода определяются по формуле Пуазейля:

$$p_{\text{Дл}} = \frac{8\rho\nu lv}{A}.$$

Значение коэффициента гидравлического сопротивления участка трубопровода длиной  $l$  при ламинарном режиме:

$$\mu_{\text{Гл}} = \frac{25,2\rho lv}{A^2}.$$

При  $Re \geq 2300$  режим движения жидкости *турбулентный*. Потери давления по длине трубопровода определяются по формуле:

$$p_{\text{Дт}} = \frac{0,443\lambda_{\text{т}}\rho v^2 l}{\sqrt{A}},$$

где  $\lambda_{\text{т}}$  – коэффициент потерь на трение при турбулентном потоке. (Его значение зависит от шероховатости стенок трубопровода и находится в пределах  $\lambda_{\text{т}} = 0,025\text{--}0,030$ ).

Для определения  $\lambda_{\text{т}}$  может быть использована формула Блазиуса:

$$\lambda_{\text{т}} = 0,3164 \cdot Re^{-0,25}.$$

На основании полученных зависимостей и принимая  $p_{\text{Дт}} = p_{\text{Д}}$ , получаем выражение для определения коэффициента гидравлического сопротивления участка трубопровода при турбулентном режиме:

$$\mu_{\text{Гт}} = \frac{0,433\lambda_{\text{т}}\rho l |Q|}{A^2 \sqrt{A}}.$$

Так как  $\mu_{\text{Гт}}$  величина положительная, а фазовая переменная  $Q$  – расход жидкости – может иметь любой знак, то в последней формуле принимают абсолютную величину  $Q$ .

Кроме потерь по длине трубопровода, существуют местные потери давления, обусловленные резким изменением величины и (или) направления скорости потока жидкости (сужение, расширение, поворот трубопровода и т. д.). Местные потери давления определяют по формуле

$$p_{\text{Дм}} = 0,5\xi\rho v^2,$$

где  $\xi$  – коэффициент местного сопротивления (безразмерная величина).

Принимая  $p_{\text{Дм}} = p_{\text{Д}}$ , находим выражение для определения коэффициента гидравлического сопротивления, учитывающего местные потери:

$$\mu_{\text{Гм}} = \frac{0,5\xi\rho|Q|}{A^2}.$$

В динамических процессах режим движения жидкости в трубопроводе может изменяться в широких пределах. Поэтому при анализе переходных процессов для оценки потерь по длине трубопроводов используют сумму коэффициентов  $\mu_{\text{Гл}}$ ,  $\mu_{\text{Гт}}$ ,  $\mu_{\text{Гм}}$ , а коэффициент гидравлического сопротивления участка трубопровода определяют по формуле

$$\mu_{\text{Г}} = \mu_{\text{Гл}} + \mu_{\text{Гт}} + \mu_{\text{Гм}} = \frac{25,2\rho v l}{A^2} + \left( \frac{0,433\lambda_{\text{т}}\rho l}{A^2\sqrt{A}} + \frac{\xi\rho}{2A^2} \right) |Q|.$$

Коэффициент жесткости  $c_{\text{Г}}$  дискретного объема жидкости  $V$  определяется по формуле

$$c_{\text{Г}} = \frac{E}{V}.$$

Сжимаемость жидкости незначительна, но в процессе работы гидроприводов рабочая жидкость вспенивается и насыщается нерастворенным воздухом. Модуль объемной упругости газожидкостной смеси  $E_{\text{с}}$  оказывается гораздо меньше модуля упругости жидкости, особенно при небольших давлениях – до 6–10 МПа. Кроме того, при определении коэффициента  $c_{\text{Г}}$  необходимо учитывать упругие свойства трубопровода. Во многих случаях деформация стенок трубопровода значительно снижает жесткость гидропривода.

Коэффициент жесткости упругого элемента зависит также от вида соединения выделенных дискретных элементов – участков трубопровода и их параметров. В общем случае они могут иметь различ-

ные геометрические размеры – диаметры, толщины и длины, а также изготавливаться из различных материалов (сталь, латунь, эластичные шланги из резины или пластмассы и др.).

При последовательном соединении двух участков трубопровода коэффициент жесткости  $c_{\Gamma}$  определяется следующей зависимостью:

$$c_{\Gamma} = \frac{\prod_{j=1}^2 c_{\Gamma j}}{\sum_{j=1}^2 c_{\Gamma j}},$$

а при разветвлении трубопровода (объединенных в одном узле)

$$c_{\Gamma} = \frac{1}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{c_{\Gamma j}}},$$

где  $c_{\Gamma j}$  – коэффициент жесткости  $j$ -го участка трубопровода;  $N$  – число ветвей трубопровода, примыкающих к узлу ветвления.

Коэффициент жесткости  $j$ -го участка трубопровода определяется с использованием формулы

$$c_{\Gamma j} = \frac{E_{\text{пр}j}}{V_j \psi_j} = \frac{E_{\text{тр}j} \delta_{\text{тр}j} E_c}{V_j \psi_j (1 + d_{\text{тр}})},$$

где  $E_{\text{пр}j}$  – приведенный модуль упругости газожидкостной смеси  $j$ -го участка трубопровода;  $V_j$  – объем  $j$ -го участка трубопровода;  $\psi_j$  – доля объема жидкости  $j$ -го участка трубопровода, отнесенная к данному упругому элементу;  $E_{\text{тр}j}$  – модуль упругости материала  $j$ -го участка трубопровода;  $d_{\text{тр}j}$ ,  $\delta_{\text{тр}j}$  – диаметр и толщина стенки  $j$ -го участка трубопровода;  $E_c$  – модуль объемной упругости газожидкостной смеси;

### 2.6.3. Определение параметров элементов динамических моделей гидромеханической системы

К ней относятся различные гидроприводы, содержащие совокупность взаимодействующих механических и гидравлических элементов. В гидромеханической системе используются такие же фазовые пере-

менные, как и в гидравлической, т. е. переменные типа потока (расходы  $Q$ ) и переменные типа потенциала (давления  $p$ ). Так как в механической системе фазовые переменные иные, то параметры элементов динамической модели гидромеханической системы (рис. 2.6) необходимо определять как для комплексных разнородных систем.

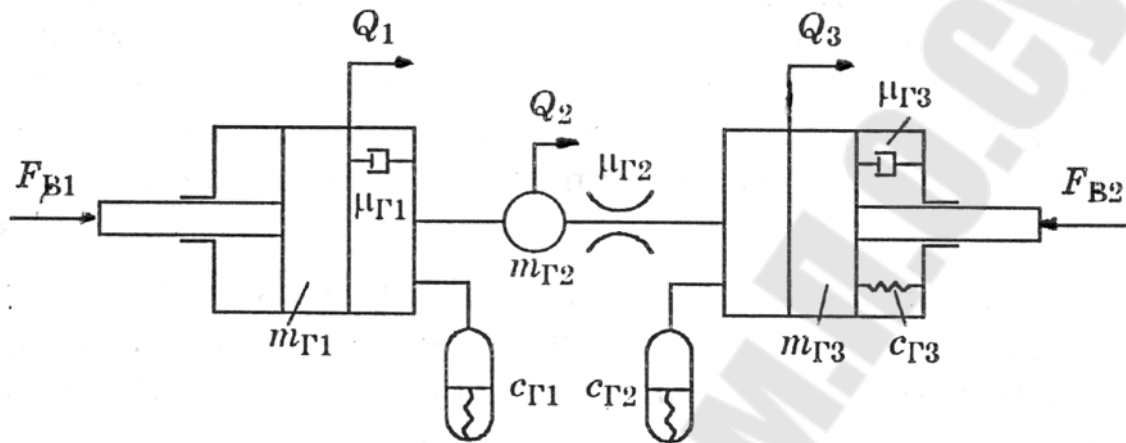


Рис. 2.6. Динамическая модель гидропривода

Коэффициент массы вычисляется по формуле

$$m_{ГМ} = m_{М} + m_{Гж} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{М} + \rho V_i}{A_i^2},$$

где  $m_{М}$  — масса механических частей технической системы, отнесенная к данному инерционному элементу (например, масса поршня цилиндра с присоединенными к нему деталями рабочих органов машины или механизма);  $V$  — объем жидкости гидромеханической системы, отнесенный к данному инерционному элементу.

В общем случае объем  $V$  переменный. В частности объем полости гидроцилиндра зависит от перемещения поршня  $x$ :

$$V = V_0 \pm Ax,$$

где  $V_0$  — начальный объем гидроцилиндра (в исходном положении поршня);  $A$  — площадь поперечного сечения гидроцилиндра; знак «+» принимается, если при увеличении координаты  $x$  объем цилиндра возрастает, а знак «-» — в противном случае.

Коэффициент гидравлического сопротивления  $\mu_{Г}$  для дискретных элементов определяют по формулам для гидравлических систем.



Коэффициенты жесткости, упругих элементов гидромеханической системы определяют по формуле

$$c_{ГМ} = c_{Гj} + \frac{c_{Мj}}{A_j^2},$$

где  $c_{Гj}$  – коэффициент гидравлической жесткости упругого компонента гидравлической природы, подсоединенного к гидроцилиндру (или иному гидромеханическому объекту);  $c_{Мj}$  – коэффициент жесткости механического упругого компонента.

Типичный механический компонент гидромеханической системы – возвратная пружина поршня или гидроаппарата (клапана, распределителя и др.). При наличии возвратной пружины часто упругими свойствами гидравлического компонента пренебрегают и коэффициент гидравлической жесткости определяют по формуле:

$$c_{Г} = \frac{c_{ВП}}{A^2},$$

где  $c_{ВП}$  – коэффициент жесткости возвратной пружины;  $A$  – площадь поперечного сечения гидроцилиндра или гидроаппарата, находящаяся под нагрузкой. Если гидроцилиндр связан с рабочим органом машины или механизма, необходимо учитывать жесткость привода этого органа, а также жесткость элементов внешней среды, взаимодействующих с рабочим органом.

Например, рассмотрим определение параметров системы гидропривода (рис. 2.6).

В динамическую модель (рис. 2.6) входят три сосредоточенных массы, три упругих элемента с коэффициентами гидравлической жесткости  $c_{Гj}$  и три диссипативных элемента с коэффициентами гидравлического сопротивления  $\mu_{Гк}$ . Коэффициенты масс инерционных элементов  $m_{Г1}$  и  $m_{Г3}$  определены с учетом масс поршней и объемов жидкости в полостях гидроцилиндров, а коэффициент  $m_{Г2}$  учитывает массу жидкости в гидравлической магистрали.

При определении коэффициентов гидравлической жесткости  $c_{Г1}$  и  $c_{Г2}$  рассматриваются физические свойства двух компонентов. Одним из них является половина длины гидравлической магистрали, а вторым – полость гидроцилиндра. Для обоих компонентов определяется коэффициент жесткости рассматриваемого участка по формуле

$$c_{Гj} = \frac{E_{прj}}{V_j \psi_j} = \frac{E_{трj} \delta_{трj} E_c}{V_j \psi_j (1 + d_{тр})},$$

а затем находится значение  $c_{Г}$ , как для последовательного соединения участков трубопровода. При вычислении коэффициент жесткости для гидроцилиндра параметры  $d_{тр}$  и  $\delta_{тр}$  в формуле соответствуют его диаметру и толщине стенок соответственно.

Коэффициент гидравлической жесткости возвратной пружины  $c_{23}$  находится по формуле:

$$c_{Г} = \frac{c_{вп}}{A^2}.$$

Коэффициенты гидравлического сопротивления  $\mu_{Г1}$  и  $\mu_{Г3}$  характеризуют потери на трение при перемещении поршня относительно цилиндра. Основная доля потерь при этом определяется уплотнительным устройством гидроцилиндра. Коэффициент  $\mu_{Г2}$  характеризует потери давления в гидравлической магистрали, а также на ее входе и выходе.

Состояния сосредоточенных масс определяются фазовыми координатами типа потока – расходами жидкости в гидроцилиндрах  $Q_1$  и  $Q_3$  и в гидравлической магистрали  $Q_2$ . Число степеней свободы равно количеству этих координат.

Так как фазовыми переменными типа потенциала в гидромеханической системе принимают давления, то силы внешних воздействий  $F_{В1}$  и  $F_{В2}$  на поршни гидроцилиндров при построении математической модели необходимо преобразовать в давления:

$$p_{В1} = \frac{F_{В1}}{A_1}; \quad p_{В2} = \frac{F_{В2}}{A_3},$$

где  $A_1$  и  $A_3$  – площади поперечных сечений соответствующих гидроцилиндров.

Потенциалы упругих  $p_{Уj}$ , диссипативных  $p_{Дк}$  и инерционных  $p_{Иi}$  элементов, характеризующих их состояния, являются внутренними распределенными силами системы.

## ГЛАВА 3. ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА МАКРОУРОВНЕ

### 3.1. Способы построения теоретических моделей

При моделировании технических объектов на макроуровне они рассматриваются как динамические системы с сосредоточенными параметрами. Описание процессов их функционирования дается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении теоретических моделей используется два подхода: физический и формальный. *Физический подход* основан на непосредственном применении физических законов, а *формальный* использует общие математические принципы при описании физических свойств объектов. Общим в использовании обоих подходов является необходимость построения динамической модели объекта.

Структура динамической модели представляется в виде совокупности взаимодействующих дискретных элементов, каждый из которых наделен соответствующими физическими свойствами. Набор элементов и их свойства определяются способом структурирования.

В динамической модели, построенной на основе метода сосредоточенных масс, все элементы простые. Простой элемент наделен только одним физическим свойством и описывается компонентным уравнением, составленным с использованием соответствующего физического закона. Взаимодействия между элементами динамической модели описываются топологическими уравнениями, выражающими условия равновесия и непрерывности фазовых координат. Топологические уравнения позволяют объединить все компонентные уравнения в общую систему уравнений и получить полную математическую модель технического объекта.

В главе 2 рассмотрено на основе физического подхода получение компонентных и топологических уравнений для технических объектов различной физической природы и установлены между элементами этих объектов динамические аналогии. Структурирование технических систем при этом выполнялось методом сосредоточенных масс и методом сеток (метод конечных разностей).

При формировании математической модели технического объекта на основе компонентных и топологических уравнений используются следующие способы: узловый, контурный, метод переменных состояния, табличный метод.

Наибольшую известность и широкое применение получил *узловой метод*. Он основан на использовании топологических уравнений, выражающих условия равновесия потенциалов в узлах дискретизации динамической системы. Математическая модель объекта получается в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, искомыми неизвестными в которых являются фазовые переменные типа потока, характеризующие состояние сосредоточенных масс.

Узловой метод имеет ряд недостатков, осложняющих его использование для автоматизации формирования математической модели непосредственно на ЭВМ. Одним из недостатков метода является неудобная форма системы уравнений математической модели. Для использования численных методов интегрирования дифференциальных уравнений наиболее предпочтительно представление уравнений в нормальной форме Коши. Узловой метод не позволяет формировать математическую модель объекта с трансформаторными и фрикционными элементами, имеет ограничения на вид компонентных уравнений, требует значительной затраты времени на матричные вычисления в процессе формирования модели.

*Метод переменных состояния* ориентирован на получение математической модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Однако представление структуры динамической модели в этом методе гораздо сложнее, чем в узловом, и требует выполнения большого объема подготовительной работы, которая не поддается автоматизации.

*Табличный метод* использует исходные компонентные и топологические уравнения непосредственно, без каких-либо преобразований, поэтому автоматизировать его легко и просто. Однако математическая модель при этом получается высокого порядка и имеет избыточное число фазовых координат. Система уравнений оказывается переопределенной. Количество уравнений значительно превышает число степеней свободы системы. Это приводит к неустойчивости вычислительных алгоритмов при решении полученной системы уравнений.

*Контурный метод* применяется в электротехнике и строительной механике, где схемы взаимодействия конструктивных элементов образуют замкнутые контуры прохождения сигналов. Применение его для других технических объектов требует построения схемы замещения (эквивалентной схемы) и сопряжено со значительными сложностями формализации процесса составления математической модели.

При структурировании динамической модели методом *функционально законченных элементов* выделяемые дискретные элементы не

обладают такой общностью, как в методе сосредоточенных масс или в сеточных методах. Количество выделяемых функционально законченных элементов и их свойства в конкретной предметной области определяются ее особенностями. Для описания элементов различных технических объектов используется множество разнообразных математических моделей. Это создает определенные преимущества при моделировании, так как исключаются любые ограничения на способы описания физических свойств элементов. Однако при этом теряется межпредметная унификация математических описаний, что требует создания и хранения в памяти ЭВМ библиотеки математических моделей элементов всех возможных технических объектов. Тем не менее при создании специализированных САПР в конкретных технических областях часто отдается предпочтение методу функционально законченных элементов.

Широкое применение для построения математических моделей технических объектов находит *формальный подход*. Он основан на использовании интегральных вариационных принципов аналитической механики. Одним из наиболее мощных теоретических методов формального моделирования является вариационный принцип Гамильтона–Остроградского. Он применим к техническим объектам различной физической природы (механическим, гидравлическим, электрическим и др.). Для систем с сосредоточенными параметрами вариационный принцип приводит к уравнениям Лагранжа второго рода.

Все упомянутые выше способы предназначены для получения математических моделей технических объектов в инвариантной форме. Эти модели представляют собой либо систему компонентных и топологических уравнений, либо систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В частном случае при описании статических состояний технического объекта математической моделью в инвариантной форме является система алгебраических уравнений, получаемая путем соответствующих преобразований исходной системы дифференциальных уравнений.

### **3.2. Графические формы представления математических моделей**

В инженерной практике часто используют графические формы представления математических моделей. Для использования графических форм должно существовать правило однозначного соответствия

условных изображений элементов графической модели и компонентов инвариантной математической модели.

Одной из форм отображения физических свойств технического объекта является *динамическая модель*. Графические изображения элементов динамической модели отождествляются с их компонентными уравнениями, а соединения элементов соответствуют топологическим уравнениям. Следовательно, динамическую модель можно рассматривать в качестве математической модели технического объекта в графической форме.

Структурирование динамической модели и идентификация ее элементов позволяют формализовать процесс составления математической модели технического объекта в инвариантной форме. Для этого удобно использовать графические формы моделей в виде графов и эквивалентных схем.

*Граф* представляет структурную математическую модель системы и отображает ее топологию, а эквивалентная схема – функциональную модель и отображает топологию и компонентный состав, так же, как и динамическая модель. Если ввести обозначения ветвей графа, то он будет содержать ту же информацию, что и эквивалентная схема.

Компонентные уравнения элементов динамической модели представляют собой компоненты полной математической модели объекта. Уравнения инерционных, упругих и диссипативных элементов технических объектов различной физической природы приведены в литературе. Трансформаторные и фрикционные элементы отображают специфические особенности внутренних свойств системы и ее взаимодействия с внешней средой.

Характеристики процессов функционирования объекта определяются не только его внутренними физическими свойствами, но и внешними воздействиями. Математические описания этих воздействий также являются компонентами математической модели. Воздействия представляют собой источники потенциалов воздействия

$$U_B = f_1(I, t)$$

и источники потоков

$$I_B = f_2(U, t).$$

При построении полной математической модели в инвариантной форме все компонентные уравнения посредством топологических

уравнений сводят в единую систему. Это наиболее удобно осуществлять с помощью графов.

Граф представляет собой совокупность узлов (вершин) и соединяющих их ветвей (ребер). Такое же определение имеет и эквивалентная схема. Определение графа может быть записано в следующем виде:

$$\Gamma = (u, v, i),$$

где  $u$  – множество узлов;  $v$  – множество ветвей;  $i$  – инцидентор – указатель способа соединения ветвей.

Ветви графа и эквивалентной схемы соответствуют компонентам математической модели. Они отображают математические описания инерционных, упругих и диссипативных элементов динамической модели и источников внешних воздействий.

Узлы графа и эквивалентной схемы соответствуют узлам дискретизации непрерывных объектов в геометрическом пространстве, вводимым при переходе от моделей микроуровня к моделям макроуровня. При дискретизации системы методом сосредоточенных масс узлы дискретизации совпадают с сосредоточенными массами, представляемыми в динамической модели материальными точками или твердыми телами. Состояние технической системы и характер протекающих в ней процессов определяются фазовыми координатами узлов дискретизации. Эти координаты представляют собой потоковые переменные (например, в механической системе – скорость или геометрические координаты).

Сосредоточенные массы динамической модели обладают дуальными свойствами: они отображают инерционные свойства технической системы и одновременно являются носителями информации о ее состоянии. Последнее выражается в том, что систему фазовых координат динамической модели связывают непосредственно с сосредоточенными массами.

Граф и эквивалентная схема позволяют эти свойства сосредоточенных масс дифференцировать более четко: инерционные свойства отображаются ветвями, а носители информации о состоянии технической системы – узлами. В результате каждая сосредоточенная масса отображается узлом графа или эквивалентной схемы, а ее физические свойства – ветвью инерционного элемента.

Узлы графа обозначают точками, а ветви – линиями (рис. 3.1).

Узлам присваивают номера сосредоточенных масс, а ветвям дают обозначения параметров отождествляемых ими элементов дина-

мической модели или обозначения источников внешних воздействий (источник потенциалов  $U_B$  или источник потоков  $I_B$ ). Один из узлов графа и эквивалентной схемы отображает инерциальную систему отсчета фазовых координат типа потока. Его называют *базовым узлом (базой)* и ему присваивается нулевой номер.

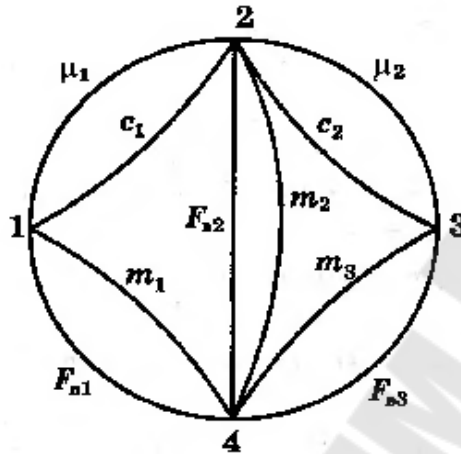


Рис. 3.1. Пример графа механической системы

Для обозначения различных ветвей эквивалентной схемы рекомендуется применять графические изображения, показанные на рис. 3.2. Ветви эквивалентной схемы и графа, отображающие внутренние свойства технического объекта, можно именовать так же, как и соответствующие им элементы динамической модели, т. е. инерционные, упругие и диссипативные. Поскольку эти ветви суть компоненты математической модели в графической форме, то и компоненты имеют те же наименования, что и ветви.

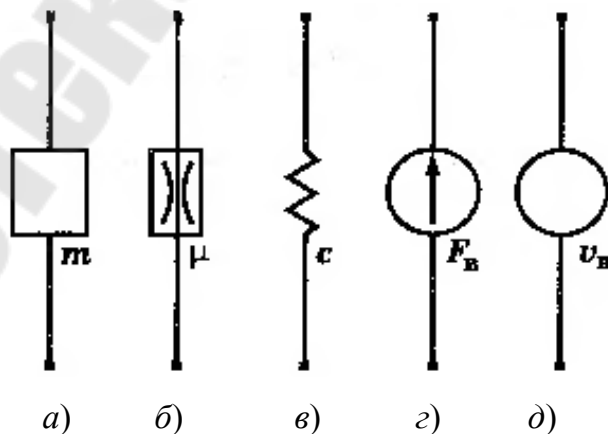


Рис. 3.2. Обозначение ветвей эквивалентной схемы: а – инерционной; б – диссипативной; в – упругой; з – источника потенциала; д – источника потока



На эквивалентных схемах и графах применяют обозначения параметров элементов и источников внешних воздействий соответственно виду моделируемой технической системы. На рис. 3.2 использованы обозначения для механической поступательной системы.

Рассмотрим особенности построения эквивалентной схемы и графа на примере механической вращательной системы, динамическая модель которой приведена на рис. 3.3, *a*. Модель отображает инерционные, упругие и диссипативные элементы системы и внешние воздействия на нее. Элементы динамической модели обозначаются на схеме их параметрами с цифровыми индексами, соответствующими порядковым номерам элементов:  $J_i$  – моменты инерции вращающихся твердых тел (сосредоточенных масс);  $c_j, \mu_j$  – коэффициенты жесткостей и сопротивлений соответственно упругих и диссипативных элементов. На динамической модели необходимо также отобразить внешние воздействия на технический объект. Источники потенциалов  $M_{Bk}$  воздействуют непосредственно на сосредоточенные массы, а источники потоков  $\omega_{Bk}$  – на упругие и диссипативные элементы. Рассматриваемый объект подвержен воздействиям только источников потенциалов  $M_{Bk}, k = \overline{1,3}$ .

Источники воздействий могут сообщать энергию объекту или отводить ее от объекта. Для отображения этого на динамической модели должны быть указаны положительные направления фазовых координат типа потока  $\omega_i$  (или  $\varphi_i$ ), характеризующих состояния сосредоточенных масс, а также направления потоков энергии, сообщаемой объекту источниками внешних воздействий  $\omega_{Bk}, M_{Bk}$ .

Если энергия источника потенциала подводится к объекту, то направления  $M_{Bk}$  и  $\omega_i$  совпадают, а если отводится (т. е. вместо источника имеет место сток), то их направления противоположны. В рассматриваемом примере вращающий момент  $M_{B1}$  является движущим, увеличивающим энергию объекта (к объекту подводится энергия двигателя), поэтому направления  $M_{B1}$  и  $\omega_1$  совпадают. Вращающие моменты  $M_{B2}$  и  $M_{B3}$  характеризуют сопротивления внешней среде движению объекта, на преодоление которых затрачивается его энергия. В этой связи направления  $M_{B2}$  и  $\omega_4$ , а также  $M_{B3}$  и  $\omega_5$  не совпадают.

Потенциалы упругих  $M_{y_j}$  и диссипативных  $M_{d_j}$  элементов, характеризующие их взаимодействие с другими элементами системы, являются внутренними воздействиями и на динамической модели не изображаются.

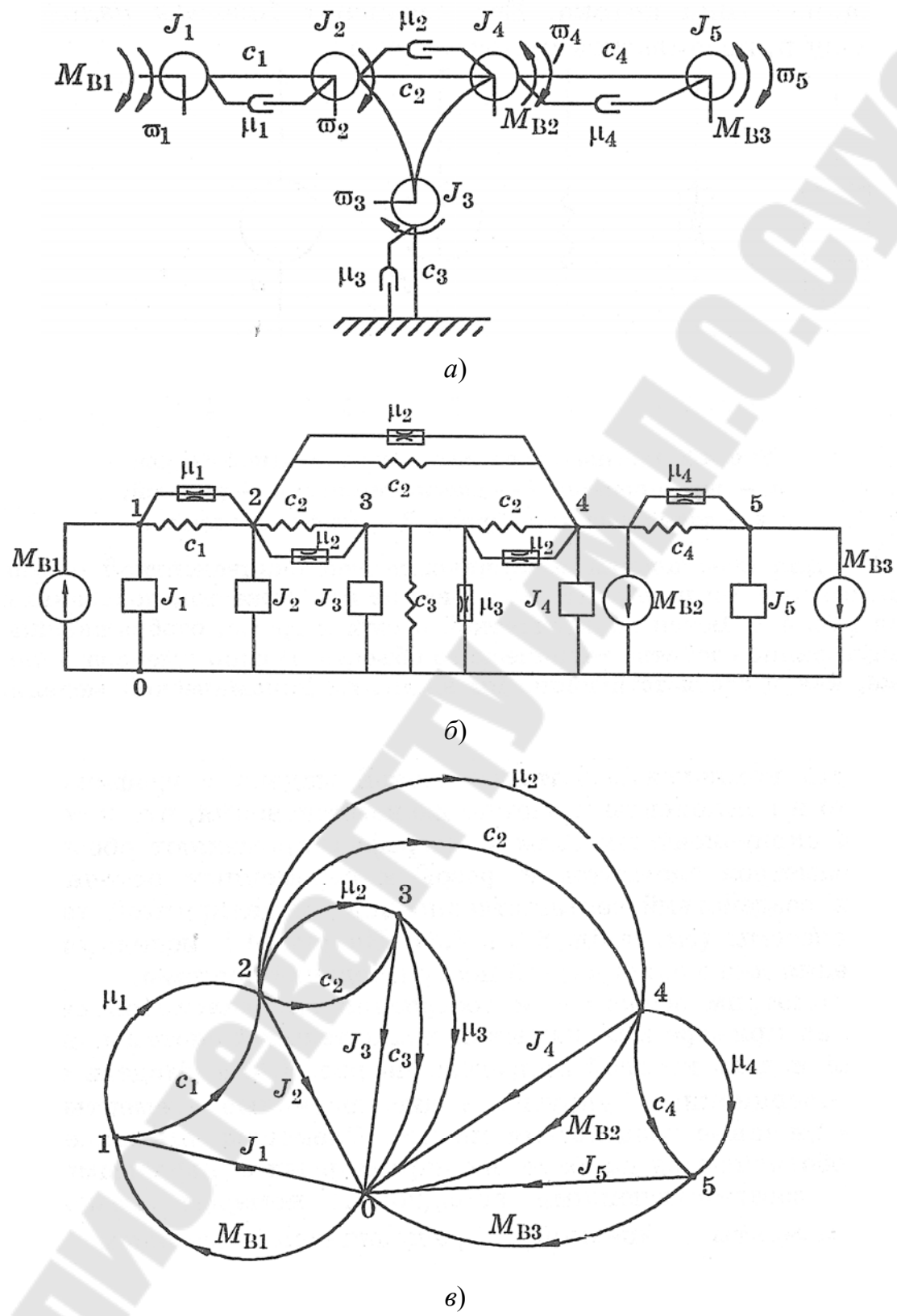


Рис. 3.3. Механическая вращательная система:  
 а – динамическая модель; б – эквивалентная схема; в – оргграф

Следует обратить внимание на то, что функции источников внешних воздействий типа потока  $\omega_{Bk}$  и типа потенциала  $M_{Bk}$  обозначаются такими же символами, как и фазовые координаты типа потока  $\omega_i$  и типа потенциала  $M_{y_j}$ ,  $M_{d_j}$  моделируемого технического объекта. Чтобы их различать в динамических моделях, в обозначениях внешних воздействий вводится индекс «в».

Если один и тот же упругий элемент соединяет между собой более двух сосредоточенных масс, т. е. образует кольцевое соединение (например, элемент на рис. 3.3, а), то такое соединение называется *дифференциальным*, а если кольцевое соединение сосредоточенных масс осуществляется различными упругими элементами, то его называют *гироторным*. Это же относится и к диссипативным элементам.

В случае *дифференциального соединения* следует иметь в виду, что все сосредоточенные массы, входящие в соединение, взаимодействуют с одним и тем же упругим и диссипативным элементами, что и отражено на схеме (рис. 3.3, а).

При моделировании сложных технических объектов графические изображения диссипативных элементов на динамических моделях могут значительно усложнить чертеж (схему). Но если диссипативные элементы расположены в модели параллельно упругим элементам (что характерно для большинства механических систем), тогда их графические изображения можно исключить, а вместо них наличие диссипативных элементов отметить записью параметров  $\mu_j$  рядом с параметрами  $c_j$  упругих элементов (при этом обозначения  $c_j$  и  $\mu_j$  должны разделяться между собой запятой). Это допущение будет использоваться в дальнейшем в динамических моделях вращательных механических систем.

Построение эквивалентной схемы (рис. 3.3, б) начинают с инерционных ветвей, которые располагают вертикально. Эти ветви соединяют узлы, отождествляющие сосредоточенные массы системы, с базовым узлом, соответствующим инерциальной системе отсчета фазовых координат типа потока. Ветви упругих и диссипативных компонентов соединяют между собой взаимодействующие узлы, в соответствии с динамической моделью. Ветви источников потенциалов связывают узлы, к которым они приложены, с базой.

Граф является аналогом эквивалентной схемы и структура его аналогична (рис. 3.3, в). Если обозначить направления сигналов в ветвях графа, то получим *ориентированный граф (орграф)*. Направления сигналов в ветвях графа изображают стрелками.

В ветвях источников внешних воздействий сигналы направляют от базы к узлу, если энергия подводится к узлу и источник обеспечивает возрастание потоковой переменной узла. В случае источника потенциала подвод энергии осуществляется при условии совпадения направлений  $M_{Bk}$  и  $\omega_i$ . При отводе энергии на преодоление сопротивлений направления  $M_{Bk}$  и  $\omega_i$  противоположны, поэтому направление сигнала в ветви источника – от узла к базе. Направление сигнала в ветви источника потока определяется аналогично, в зависимости от того, подводится энергия к техническому объекту от внешней среды или отводится.

Во всех ветвях инерционных компонентов направления сигналов от узлов к базе. Такое направление характеризует затраты энергии источников на увеличение кинетической энергии инерционных элементов. В любых других ветвях, соединяющих узлы с базой, кроме ветвей источников, сигналы всегда направлены к базе.

В ветвях упругих компонентов стрелки указывают направление передачи энергии от источников к потребителям. Если ветви диссипативных компонентов параллельны ветвям упругих компонентов, то направления сигналов в них одинаковые.

Однако встречаются случаи, когда нельзя однозначно указать направление передачи энергии в некоторых ветвях графа. Это характерно для систем с дифференциальным соединением сосредоточенных масс. В рассматриваемом примере сосредоточенные массы с моментами инерции  $J_2$ ,  $J_3$  и  $J_4$  соединены упругим элементом с коэффициентом жесткости  $c_2$  и диссипативным элементом с коэффициентом сопротивления  $\mu_2$ . В результате на эквивалентной схеме (рис. 3.3, б) узлы 2, 3 и 4 связаны между собой одними и теми же упругими и диссипативными ветвями  $c_2$  и  $\mu_2$ . Энергия передается от узла 2 к узлам 3 и 4, но направление передачи энергии между узлами 3 и 4 заранее установить нельзя.

Орграф, в отличие от эквивалентной схемы, содержит только ориентированные ветви. В этой связи упругая и диссипативная ветви  $c_2$  и  $\mu_2$  эквивалентной схемы, соединяющие узлы 3 и 4, на орграфе отсутствуют. Вместе с тем следует отметить, что отображать соединение этих узлов на орграфе нет необходимости. Орграф вполне определенно иллюстрирует взаимодействие всех трех узлов и отражает распределение энергии между узлами 3 и 4, передаваемой к ним через упругий и диссипативный элементы  $c_2$  и  $\mu_2$  от узла 2.

При гироторном соединении (рис. 3.4, а) каждая пара сосредоточенных масс соединена своими упругими и диссипативными элементами, поэтому все они должны быть отображены на орграфе соответствующими ветвями с указанием направлений в них сигналов (рис. 3.4, в). Здесь также определить направление сигнала в одной из ветвей может оказаться затруднительным. В этом случае принимают произвольное направление.

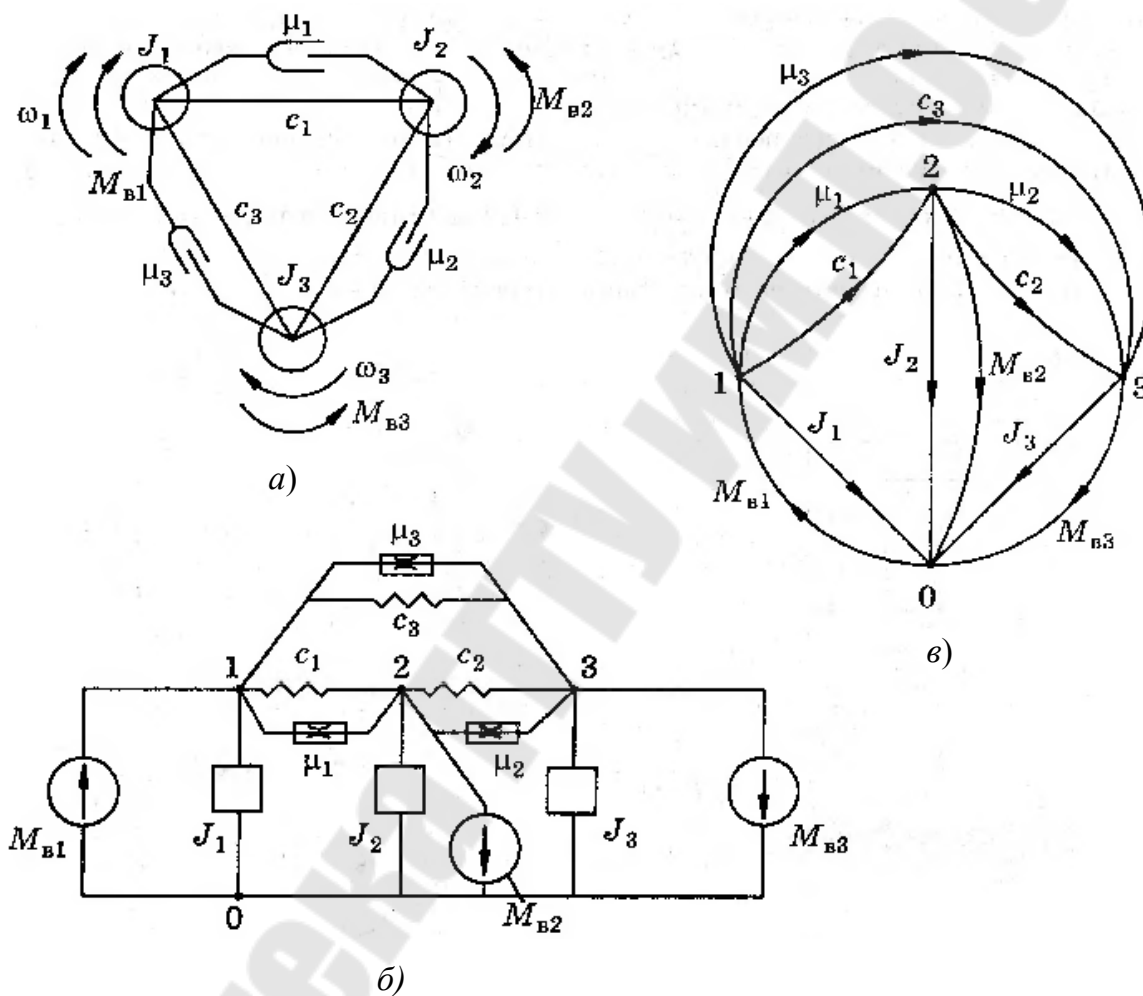


Рис. 3.4. Технического объекта с гироторным соединением сосредоточенных масс:  
 а – динамическая модель; б – эквивалентная схема;  
 в – орграф

Таким образом, орграф позволяет идентифицировать структуру и физические свойства моделируемой технической системы и представляет собой ее математическую модель в графической форме. Использование орграфа дает возможность формализовать процесс составления полной математической модели объекта в инвариантной

форме, т. е. получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процесс функционирования технического объекта.

Эквивалентную схему применяют обычно лишь при предметном моделировании, когда необходимо иметь схему замещения для построения эквивалентной динамической модели на элементах иной физической природы. При математическом моделировании технических систем ограничиваются использованием орграфов.

### 3.3. Матричная форма представления математической модели

Информация о математической модели технического объекта, которую содержит орграф, может быть представлена в виде матрицы.

Сформируем матрицу размерности  $\alpha \times \beta$ , где  $\alpha$  – число строк,  $\beta$  – число столбцов. В этой матрице каждому узлу орграфа, за исключением базового, соответствует строка, а каждой ветви – столбец. Единицами в матрице отметим наличие соединений между узлами и ветвями орграфа, а нулями – их отсутствие. Направления сигналов в ветвях орграфа отобразим знаками единиц. Если сигнал направлен от узла, примем знак минус, а если к узлу – знак плюс.

Матрицу, построенную по изложенным правилам для данного орграфа, называют матрицей инциденций.

В табл. 3.1 приведена матрица инциденций для технического объекта, динамическая модель которого и орграф представлены на рис. 3.3.

Таблица 3.1

Матрица инциденций механической вращательной системы

Узлы	Ветви															
	Инерционные					Диссипативные				Упругие				Источники потенциалов		
	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$M_{B1}$	$M_{B2}$	$M_{B3}$
1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
2	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
3	0	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	-1	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1
Подматрицы	$A_{И}$					$A_{Д}$				$A_{У}$				$A_{В}$		

Обозначим матрицу инциденций  $A = (a_{ij})$ ,  $i = \overline{1, \alpha}$ ;  $j = \overline{1, \beta}$ , где  $\alpha$  – число узлов графа, за исключением базового;  $\beta$  – суммарное число ветвей орграфа – инерционных, диссипативных, упругих и источников внешних воздействий.

При составлении матрицы инциденций для объекта с источниками внешних воздействий типа потока  $v_{B1}^*(t)$  в нее включаются не только узлы, отображающие сосредоточенные массы, но и узлы источников потоков, отмечаемые на орграфе и в матрице звездочкой и имеющие свою нумерацию. Кроме того, необходимо иметь в виду следующее. Каждый узел орграфа должен находиться в равновесии, что соответствует топологическому уравнению

$$\sum_i F_i = 0,$$

где  $F_i$  – потенциалы ветвей, инцидентных данному узлу. Выполнение этого условия для узла источника потока обеспечивается, если учесть реакцию внешней среды  $F_{Bj}^*$ . Эта реакция представляет собой потенциал ветви орграфа, отображающей источник потока. Поэтому источники потоков в матрице инциденций формально замещаются источниками реактивных потенциалов  $F_{Bj}^*$ .

Матрицу инциденций  $A$  можно представить состоящей из подматриц инерционных  $A_{И}$ , диссипативных  $A_{Д}$ , упругих  $A_{У}$  ветвей и подматрицы ветвей источников потенциалов  $A_{В}$ :

$$A = [A_{И}, A_{Д}, A_{В}].$$

Из табл. 3.1 следует, что подматрица  $A_{И}$  во всех случаях единичная диагональная. В этой связи при составлении матрицы инциденций  $A$  с целью упрощения обычно подматрицу  $A_{И}$  опускают.

Рассмотрим подматрицу ветвей упругих компонентов  $A_{У}$  для примера технического объекта на рис. 3.3 (табл. 3.1) и установим связь между нею и компонентными уравнениями упругих элементов.

Компонентное уравнение упругого элемента механической вращательной системы имеет следующий вид:

$$M_y = c \int \omega_y dt. \quad (3.1)$$

Для первого упругого элемента, согласно динамической модели (рис. 3.3, а)  $\omega_{y1} = \omega_1 - \omega_2$ , следовательно, компонентное уравнение этого элемента примет следующий вид:

$$M_{y1} = c_1 \int (\omega_1 - \omega_2) dt. \quad (3.2)$$

Рассмотрим возможность получения этого же уравнения на основе матрицы инциденций. Примем во внимание, что состояние сосредоточенных масс, а следовательно, и отображающих их узлов графа, характеризуется фазовыми координатами типа потока  $\omega_j$ .

Учитывая это и используя столбец подматрицы  $A_y$ , соответствующий данному упругому элементу, можно составить следующее выражение:

$$M_{yj} = -c_j \int \left( \sum_{i=1}^n I_{yij} \omega_i \right) dt, \quad (3.3)$$

где  $\omega_i$  – фазовая координата типа потока (угловая скорость)  $i$ -й сосредоточенной массы ( $i$ -го узла орграфа);  $I_{yij}$  – инцидентор – элемент матрицы инциденций  $A$ , характеризующий наличие или отсутствие соединения  $j$ -й ветви орграфа с  $i$ -м узлом и направление сигнала в данной ветви;  $n$  – число узлов орграфа. Используя выражение (3.3), на основе матрицы инциденций, приведенной в табл. 3.1, получаем компонентное уравнение для первого упругого элемента, полностью совпадающее с уравнением (3.2).

Для второго упругого элемента получаем

$$M_{y2} = c_2 \int (\omega_2 - \omega_3 - \omega_4) dt, \quad (3.4)$$

а соответственно, для третьего

$$M_{y3} = c_3 \int \omega_3 dt. \quad (3.5)$$

Сравнивая выражения (3.2), (3.4) и (3.5) и анализируя соответствующие им столбцы подматрицы инциденций  $A_y$  ветвей упругих элементов, легко обнаружить следующие закономерности. Если в столбце содержатся два ненулевых инцидентора, то упругий элемент соединяет между собой две сосредоточенные массы, т. е. осуществляет простое соединение. При наличии трех и более инциденторов (например, второй столбец подматрицы  $A_y$  в табл. 3.1) соединение сосредоточенных масс дифференциальное. Если инцидентор только



один, то упругий элемент соединяет сосредоточенную массу с инерционной системой отсчета. Такое соединение называют реактивным, а упругий элемент, осуществляющий это соединение – реактивным упругим элементом.

Для получения компонентных уравнений инерционных элементов по матрице инцидентий используют выражение, которое составляется аналогично выражению (3.3):

$$M_{Ij} = -J_i \frac{d}{dt} (I_{Iii} \omega_i), \quad (3.6)$$

где  $I_{Iii}$  – диагональный элемент подматрицы инцидентий  $A_I$  ветвей инерционных компонентов ( $I_{Iii} = -1$  для всех инерционных компонентов, поэтому  $M_{Ii} = J_i \frac{d\omega_i}{dt}$ ).

Компонентное уравнение диссипативного элемента:

$$M_{Dk} = -\mu_k \sum_{i=1}^n I_{Dik} \omega_i, \quad (3.7)$$

где  $I_{Dik}$  – элемент подматрицы инцидентий  $A_D$  ветвей диссипативных компонентов.

Таким образом, на основе матрицы инцидентий можно получить все компонентные уравнения элементов технической системы и построить ее математическую модель в инвариантной форме. Следовательно, матрица инцидентий несет ту же информацию о системе, что и оргграф или динамическая модель. Поэтому ее можно рассматривать как функциональную математическую модель технического объекта в матричной форме.

### 3.4. Узловой метод формирования математической модели

Для формирования полной математической модели технического объекта на основе компонентных и топологических уравнений наиболее широкое применение получил узловой метод.

Так как компонентные уравнения описывают физические свойства простых элементов, устанавливая соотношения между фазовыми переменными типа потока и типа потенциала, характеризующими состояния элементов, а топологические уравнения описывают условия равновесия и непрерывности фазовых переменных, то используем

обозначения фазовых переменных и параметров, применяемые для механической поступательной системы, и выпишем компонентные и топологические уравнения в этих обозначениях.

Принимая во внимание, что фазовые переменные такой системы ( $v_k$  и  $F_j$ ) составляют некоторые множества, запишем компонентные уравнения элементов системы в матричной форме:

– уравнения инерционных элементов:

$$\vec{F}_И = m \left( \frac{d\vec{v}_И}{dt} \right); \quad (3.8)$$

– уравнения диссипативных элементов:

$$\vec{F}_Д = \mu \vec{v}_Д; \quad (3.9)$$

– уравнения упругих элементов:

$$\vec{F}_У = c \int \vec{v}_У dt; \quad (3.10)$$

где  $\vec{F}_И$ ,  $\vec{F}_Д$ ,  $\vec{F}_У$  – векторы потенциалов инерционных, диссипативных и упругих элементов, соответственно;  $m$ ,  $\mu$ ,  $c$  – диагональные матрицы параметров этих же элементов;  $\vec{v}_И$ ,  $\vec{v}_Д$ ,  $\vec{v}_У$  – векторы фазовых переменных типа потока соответствующих элементов.

Топологические уравнения механической поступательной системы:

– уравнение равновесия потенциалов ветвей орграфа, инцидентных  $i$ -му узлу:

$$\left( \sum_j \vec{F}_j \right)_i = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

– уравнение непрерывности фазовых переменных типа потока  $l$ -й ветви орграфа:

$$\left( \sum_k \vec{v}_k \right)_l = 0, \quad l = \overline{1, L},$$

где  $n$  – число узлов орграфа, за исключением базового;  $L$  – число ветвей.

Используя матрицу инциденций, топологические уравнения можно записать в матричной форме:

$$A\vec{F} = 0; \quad (3.11)$$

$$\vec{v}_B + A^T \vec{v} = 0, \quad B = И, Д, У, \quad (3.12)$$

где  $A$  – матрица инцидентностей;  $A^T$  – транспонированная матрица  $A$ ;  $\vec{F}$  – вектор потенциалов ветвей;  $\vec{v}_B, \vec{v}$  – векторы потоковых переменных, соответственно, ветвей и узлов графа. Элемент  $v_{Bl}$  вектора  $\vec{v}_B$  определяется по формуле:

$$v_{Bl} = \sum_{i=1}^n I_{Bil} v_i, \quad (3.13)$$

где  $I_{Bil}$  – элемент матрицы инцидентностей, характеризующий инцидентность  $l$ -й ветви орграфа  $i$ -му узлу.

Таким образом, основные положения узлового метода можно сформулировать следующим образом:

1) в качестве базисных координат используются узловые потоковые переменные  $\vec{v}$ , которые характеризуют состояния узлов графа;

2) исходным топологическим уравнением системы является уравнение равновесия потенциалов ветвей в узлах графа (3.11), что соответствует принципу Даламбера.

Вектор потенциалов системы  $\vec{F}$  представляется состоящим из подвекторов потенциалов компонентов  $\vec{F}_И, \vec{F}_Д, \vec{F}_У, \vec{F}_В$  – инерционных, диссипативных, упругих и источников внешних воздействий, соответственно:

$$\vec{F}^T = [\vec{F}_И, \vec{F}_Д, \vec{F}_У, \vec{F}_В]. \quad (3.14)$$

Аналогично можно представить матрицу инцидентностей, состоящую из соответствующих подматриц:

$$A = [A_И, A_Д, A_У, A_В]. \quad (3.15)$$

Используя выражения (3.14) и (3.15), можно привести уравнение равновесия системы к следующему виду:

$$0 = [A_И \vec{F}_И + A_Д \vec{F}_Д + A_У \vec{F}_У + A_В \vec{F}_В]. \quad (3.16)$$

Если в данное выражение подставить значения потенциалов ветвей (3.8)–(3.10), то получим выражение следующего вида:

$$A_И m \left( \frac{d\vec{v}_И}{dt} \right) + A_Д \mu \vec{v}_Д + A_У c \int \vec{v}_У dt + A_В \vec{F}_В = 0.$$

С учетом выражения (3.12) можно переписать последнее выражение в следующем виде:

$$A_{\text{И}} m A_{\text{И}}^T \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + A_{\text{Д}} \mu A_{\text{Д}}^T \vec{v} + A_{\text{Y}} c A_{\text{Y}}^T \int \vec{v} dt = -A_{\text{B}} \vec{F}_{\text{B}}. \quad (3.17)$$

Полученное выражение (3.17) показывает, что классический вариант узлового метода приводит к получению интегро-дифференциальных уравнений. Такой вид уравнений неудобен для анализа процесса функционирования объекта. Как уже упоминалось, наиболее предпочтительной формой математической модели при использовании численных методов является система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Однако отмеченный недостаток узлового метода можно легко устранить. Преобразование интегро-дифференциальных уравнений (3.17) к нормальной форме можно осуществить путем расширения координатного базиса. Для этого введем функции потенциалов упругих компонентов в состав базисных координат. Тогда эти функции представляются выражением:

$$\vec{F}_{\text{Y}} = -c A_{\text{Y}}^T \int \vec{v} dt. \quad (3.18)$$

Выполнив подстановку (3.18) в (3.17) и переписав выражение относительно производной, а также полученные выражения сведем в единую систему уравнений, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{A_{\text{B}} \vec{F}_{\text{B}} + A_{\text{Y}} \vec{F}_{\text{Y}} - A_{\text{Д}} \mu A_{\text{Д}}^T \vec{v}}{A_{\text{И}} m A_{\text{И}}^T}, \\ \frac{d\vec{F}_{\text{Y}}}{dt} = -c A_{\text{Y}}^T \vec{v}. \end{cases} \quad (3.19)$$

В уравнениях (3.19) базисными координатами являются фазовые переменные  $\vec{v}$  и  $\vec{F}_{\text{Y}}$ . Базисными координатами называют совокупность неизвестных переменных в уравнениях, описывающих функционирование динамической системы.

Для системы с источниками внешних воздействий типа потенциала потоковые фазовые переменные  $\vec{v}$  характеризуют состояние сосредоточенных масс и являются независимыми координатами, а их количество равно числу степеней свободы системы. При этом число узлов орграфа  $n$  (за вычетом базового) равно числу сосредоточенных масс.

Оргграф объекта с источниками внешних воздействий типа потока включает дополнительные узлы, отображающие внешнюю среду, генерирующую эти воздействия. Их называют узлами источников потоков. Такие узлы имеют свою отдельную нумерацию и отмечаются на оргграфе звездочками.

Независимыми координатами системы являются только фазовые переменные типа потока  $\vec{v}$ , характеризующие состояния сосредоточенных масс технической системы. Эти массы отображаются на оргграфе узлами с порядковыми номерами без индексов. Их количество равно числу степеней свободы системы.

Подматрица инерционных ветвей оргграфа  $A_{\text{И}}$ , как отмечалось, является единичной матрицей. Порядок этой матрицы для объекта с источниками потенциалов равен числу степеней свободы системы  $n$ , а для объектов с источниками потоков ее порядок будет равен сумме:  $n + n_{\text{и.п}}$ , где  $n_{\text{и.п}}$  – количество источников потоков. Однако во всех случаях эта матрица квадратная. Такой же порядок имеет и диагональная матрица параметров инерционных элементов  $m$ . Для объектов с источниками потоков в состав матрицы  $m$  входят также элементы  $m_i^*$ , являющиеся параметрами инерционности внешней среды. При моделировании технических объектов инерционность внешней среды полагают бесконечно большой, поэтому включение параметров  $m_i^*$  в состав матрицы  $m$  необходимо рассматривать как формальный прием обеспечения необходимой ее размерности.

Так как матрицы  $A_{\text{И}}$  и  $m$  одного и того же порядка  $n$ , то матричное произведение в первом уравнении системы (3.19)  $A_{\text{И}}mA_{\text{И}}^T = m$ . С учетом этого систему (3.19) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{A_{\text{В}}\vec{F}_{\text{В}} + A_{\text{У}}\vec{F}_{\text{У}} - A_{\text{Д}}\vec{F}_{\text{Д}}}{m}, \\ \frac{d\vec{F}_{\text{У}}}{dt} = -cA_{\text{У}}^T\vec{v}, \end{cases} \quad (3.20)$$

где  $\vec{F}_{\text{Д}} = -\mu A_{\text{Д}}^T\vec{v}$  – вектор потенциалов диссипативных компонентов, имеет матричную форму и представляет собой компонентное уравнение диссипативных элементов.

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.20) необходимо задать начальные условия  $\vec{v}_0$  и  $\vec{F}_{\text{У}0}$

при  $t = 0$ . Первое матричное уравнение системы (3.20) выражает принцип Даламбера, а второе является компонентным уравнением упругих элементов.

В системе уравнений (3.20) число неизвестных функций  $\vec{v}$  и  $\vec{F}_y$  равно числу дифференциальных уравнений. Следовательно, узловый метод позволяет избежать избыточности фазовых координат и перепределенности системы уравнений, что способствует повышению устойчивости вычислительных алгоритмов при их решении численными методами. Процедура формирования математической модели полностью формализована и можно построить алгоритм ее реализации на ЭВМ.

Изложенная модификация узлового метода позволяет получить модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, наиболее удобной при использовании численных методов интегрирования. Таким образом, эта модификация устраняет один из недостатков классического узлового метода.

Узловой метод хорошо приспособлен для моделирования электрических цепей, гидравлических и тепловых систем (движение жидкости в гидравлических магистралях, теплопередача в твердом теле при одномерном тепловом потоке). Для механических систем он применим лишь в случае представления объектов в виде системы материальных точек или твердых тел, совершающих простые движения – поступательные или вращательные.

Но узловый метод не может применяться для динамических систем, содержащих трансформаторные и фрикционные элементы. Это обусловлено невозможностью отображения этих элементов матрицей инцидентий. Узловым методом нельзя построить математическую модель системы твердых тел при сложном их движении – плоском, сферическом. Кроме того, в некоторых случаях для описания физических свойств технических объектов и взаимодействия с внешней средой недостаточно использования рассмотренных выше простых элементов. В частности это относится к объектам с неголономными связями, с виртуальными связями и с переменной структурой. Такими свойствами обладают многие механические и гидромеханические системы.

Если параметры элементов  $m$ ,  $c$ ,  $\mu$  рассматриваемой системы постоянны, то полученная математическая модель будет линейной. Однако в реальных системах значения параметров элементов зависят от фазовых координат и модель оказывается нелинейной. Кроме того,

необходимо учитывать силы кулоновского трения, являющиеся нелинейными функциями. Отметим, что силы кулоновского трения при составлении математической модели условно относят к внешним воздействиям.

В гидравлической системе используются нелинейные функции для определения параметров диссипативных и упругих элементов  $\mu_{\Gamma}$  и  $c_{\Gamma}$ .

Однако нелинейные функции не препятствуют построению математической модели узловым методом, так как они включаются в нее после формирования системы уравнений.

### 3.5. Уравнения Лагранжа второго рода

При моделировании сложных технических систем применяют уравнения Лагранжа второго рода. Их можно использовать при построении математических моделей объектов любой физической природы, если они рассматриваются как системы с сосредоточенными параметрами. При этом никаких ограничений на структуру и физические свойства объекта не накладывается.

Уравнения Лагранжа второго рода для системы с голономными связями имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial q_i} = Q_i, \quad (3.21)$$

где  $E_{\text{к}}$  – кинетическая энергия системы;  $q_i$  – обобщенная координата;  $\dot{q}_i$  – обобщенная скорость;  $Q_i$  – обобщенная сила;  $i = \overline{1, n}$ ;  $n$  – число степеней свободы системы.

В качестве обобщенных координат выбирают независимые между собой переменные, которые позволяют полностью определить состояние исследуемой системы. Обычно в качестве обобщенных координат принимают величины, производные по времени от которых представляют собой фазовые координаты типа потока. Например, для механических систем обобщенными координатами выбирают линейные и угловые скорости. В этом случае обобщенные силы сохраняют свой физический смысл и представляют собой силы и вращающие моменты.

Каждой обобщенной координате  $q_i$  соответствует своя обобщенная сила  $Q_i$ . Работу всех обобщенных сил на возможных перемещениях системы (виртуальную работу) можно вычислить по формуле

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \delta W_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (3.22)$$

где  $\delta W_i$  – работа  $i$ -й обобщенной силы на возможном перемещении;  $\delta q_i$  – вариация  $i$ -й обобщенной координаты.

Из формулы (3.22) следует, что обобщенные силы представляют собой коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы.

Так как вариации обобщенных координат  $\delta q_i$  независимы, то вычисляя работу всех приложенных к системе сил на одном из возможных перемещений  $\delta q_i$ , все остальные вариации в формуле (3.22) принимают равными нулю, поэтому достаточно легко можно определить каждую обобщенную силу  $Q_i$  в отдельности.

Кинетическая энергия системы  $E_k$  в общем случае является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени и представляет собой сумму:

$$E_k = E_{k_0} + E_{k_1} + E_{k_2},$$

где  $E_{k_0} = a_0$ ;  $E_{k_1} = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i$ ;  $E_{k_2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ .

Если формулы связей декартовых и обобщенных координат не содержат явно времени  $t$ , то  $E_{k_0} = E_{k_1} = 0$ , а  $E_k = E_{k_2}$ . Следовательно, при стационарной структуре системы кинематическая энергия представляется однородной квадратичной формой:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.23)$$

где  $m_{ij}$  – элемент матрицы параметров инерционных элементов системы.

Обобщенные силы можно разделить на потенциальную  $Q_{\Pi}$ , диссипативные  $Q_{\text{Д}}$  и произвольные  $Q^*$ .

Силы называются потенциальными, если существует положительно определенная функция обобщенных координат, удовлетворяющая следующим равенствам:

$$Q_{\Pi_i} = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $E_{\Pi} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  – потенциальная энергия системы.



В стационарном равновесии состояние системы  $E_{\Pi} = \min$ , следовательно,  $\delta E_{\Pi} = 0$  и  $\delta^2 E_{\Pi} > 0$ . В окрестности точки, соответствующей этому состоянию в фазовом пространстве, потенциальная энергия может быть представлена квадратичной формой:

$$E_{\Pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.24)$$

$$Q_{Di} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\Phi$  – диссипативная функция Рэлея:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.25)$$

где  $\mu_{ij}$  – элемент матрицы параметров упругих элементов системы.

Обобщенная сила  $Q_i$  соответствует  $i$ -й обобщенной координате, равна алгебраической сумме произвольной  $Q_i^*$  потенциальной  $Q_{\Pi i}$  и диссипативной  $Q_{Di}$  составляющих:

$$Q_i = Q_i^* - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.26)$$

Подставим значение  $Q_i$  в уравнении (3.21), опуская индекс (\*) при составляющей  $Q_i^*$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{\kappa}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{\kappa}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.27)$$

Обобщенная сила  $Q_i$ , фигурирующая в этом уравнении, определяется с учетом работы источников всех внешних воздействий, а также некоторых внутренних источников, которые не могут быть отнесены к упругим и диссипативным элементам (например, силы кулоновского трения в механических системах).

Математическая модель, получаемая на основе уравнений Лагранжа второго рода, представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\vec{F}(\ddot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = 0. \quad (3.28)$$

В эту систему входит  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка, где  $n$  – число степеней свободы системы.

Процедура получения математической модели на основе уравнений Лагранжа второго рода включает следующие операции:

1) составление динамической модели технического объекта (при этом выделяются инерционные, упругие, диссипативные, трансформаторные и фрикционные элементы, определяются источники внешних воздействий);

2) определение возможных перемещений элементов системы с учетом наложенных позиционных голономных связей и введение обобщенных координат  $q_i$  количество которых должно соответствовать числу степеней свободы системы  $n$ ;

3) составление выражений для вычисления кинетической  $E_k$ , и потенциальной  $E_{\Pi}$  энергий и диссипативной функции Рэля  $\Phi$ ;

4) составление выражения для вычисления виртуальной работы  $\delta W$  источников внешних воздействий, определение обобщенных сил  $Q_i$ ;

5) выполнение операций дифференцирования, предусмотренных уравнением (3.27) и формированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим важное свойство функций  $E_k$ ,  $E_{\Pi}$ ,  $\Phi$  – их аддитивность. Напомним, что способностью накапливать кинетическую энергию обладают инерционные элементы, а потенциальную энергию – упругие элементы. Диссипативные элементы рассеивают энергию системы, затрачивая ее на преодоление внутренних сопротивлений. В связи со свойством аддитивности кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех инерционных элементов. Потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех упругих элементов, а диссипативная функция – сумме энергий потерь всех диссипативных элементов.

В общем случае, когда состояние дискретных элементов системы, обладающих инерционными свойствами и взаимодействующих между собой посредством безынерционных упругих и диссипативных элементов, описываются несколькими обобщенными координатами, функции  $E_k$ ,  $E_{\Pi}$ ,  $\Phi$  для каждого элемента определяются по формулам (3.23)–(3.25). Примером такого объекта является твердое тело с шестью степенями свободы. Однако при моделировании часто встречаются более простые динамические модели, в которых состоя-

ние каждого дискретного элемента характеризуется одной или двумя обобщенными координатами. Тогда функции  $E_k$ ,  $E_{\Pi}$ ,  $\Phi$  значительно упрощаются.

Например, при плоском движении твердого тела кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий и переносном (поступательном) и относительном (вращательном) движениях:

$$E_k = 0,5mv^2 + 0,5J\omega^2, \quad (3.29)$$

где  $m$  – масса твердого тела;  $v$  – скорость центра масс тела;  $J$  – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр масс;  $\omega$  – угловая скорость вращения тела относительно этой оси.

Кинетическая энергия сосредоточенной массы жидкости в дискретном элементе – участке трубопровода:

$$E_k = 0,5m_{\Gamma}Q^2, \quad (3.30)$$

где  $m_{\Gamma}$  – коэффициент массы, кг/м<sup>4</sup>;  $Q$  – расход, м<sup>3</sup>/с.

Потенциальная энергия упругого элемента

$$E_k = 0,5c\Delta^2, \quad (3.31)$$

где  $c$  – параметр упругого элемента (характеризует его способность накапливать потенциальную энергию);  $\Delta = q_1 - q_2$ ;  $q_1$ ,  $q_2$  – обобщенные координаты инерционных элементов, соединяемых данным упругим элементом.

Для механической системы  $\Delta$  представляет собой величину деформации упругого элемента (линейную или угловую), для гидравлической – изменение объема жидкости упругого элемента, для электрической – изменение заряда конденсатора. Тепловая система упругими свойствами не обладает.

Диссипативная функция определяется по формуле

$$\Phi = 0,5\mu\Delta^2, \quad (3.32)$$

где  $\mu$  – параметр диссипативного элемента;  $\Delta = q_1 - q_2$ ;  $q_1$ ,  $q_2$  – обобщенные скорости (фазовые переменные типа потока), характеризующие состояние инерционных элементов, соединяемых данным диссипативным элементом.

Для механической системы  $\Delta$  представляет собой относительную скорость движения взаимодействующих сосредоточенных масс,

для гидравлической – скорость движения сосредоточенной массы жидкости в дискретном участке трубопровода, в тепловой системе – разность температур в узлах дискретизации.

### **3.6. Метод функционально законченных элементов**

Во многих отраслях техники объекты состоят из некоторого конечного набора типовых конструктивных элементов. Каждый такой элемент имеет определенное функциональное значение и выполняется в виде автономного объекта, завершено в конструктивном отношении. При этом предусмотрена возможность его присоединения к другим типовым конструктивным элементам и создания на основе упорядоченной их совокупности некоторой интегрированной технической системы, обеспечивающей заданный процесс функционирования, отвечающий определенным требованиям.

При наличии таких элементов они могут быть положены в основу структурирования объектов при их математическом описании. Это создает определенные преимущества при проектировании. Структуру объекта составляют типовые элементы, имеющие соответствующие математические описания, которые используются для получения полной математической модели технического объекта. Изменяя в процессе проектирования количественный и качественный состав элементов и варьируя их параметрами, можно получить в результате технический объект с высокими показателями качества и эффективности.

Метод структурирования технического объекта и построения его математической модели в рассматриваемом случае называют *методом функционально законченных элементов*. Этот метод широко применяется при проектировании гидроприводов. Однако его можно использовать и в других областях техники.

Рассмотрим особенности этого метода на примере гидромеханических систем. Он обладает высокой гибкостью и позволяет составить динамическую модель любого гидропривода.

Математические модели функционально законченных элементов можно получить различными методами, однако наиболее удобно воспользоваться уравнениями Лагранжи второго рода. В этом случае нет необходимости рассматривать взаимодействие элемента с другими элементами системы. Достаточно лишь составить выражения для определения кинетической  $E_k$  и потенциальной  $E_{\Pi}$  энергий и дисси-

пативной функции  $\Phi$ . Так как  $E_k$ ,  $E_{\Pi}$  и  $\Phi$  представляют собой квадратичные функции обобщенных координат и обобщенных скоростей, то не возникает необходимости выбора направления координат или учета предполагаемого расположения элемента в динамической модели. Воздействия на элемент как внутренние, так и внешние, также не принимаются во внимание при построении его математической модели. Дело в том, что взаимодействия элементов будут учтены топологическими уравнениями при формировании математической модели системы, а для внешних воздействий составляются отдельные математические описания, входящие в библиотеку моделей воздействий, которая так же, как и библиотека моделей элементов, используется на стадии формирования полной модели системы.

Определив функции  $E_k$ ,  $E_{\Pi}$  и  $\Phi$  и используя уравнения Лагранжа второго рода, получают математическую модель элемента, которая в общем случае представляется выражением вида:

$$F_{И} + F_{Д} + F_{У} = F_{В}, \quad (3.33)$$

где  $F_{И}$  – сила инерции элемента;  $F_{Д}$  – диссипативная сила элемента;  $F_{У}$  – сила упругости элемента;  $F_{В}$  – сила взаимодействия данного элемента с другими элементами системы.

Для элементов вращательного движения вместо сил в уравнение (3.33) будут входить соответствующие моменты:

$$M_{И} + M_{Д} + M_{У} = M_{В}.$$

В табл. 3.2 указаны физические свойства, которыми поделены функционально законченные элементы, и даны математические описания этих свойств. В формулах приняты следующие обозначения параметров и фазовых переменных:  $m$ ,  $J_{И}$ ,  $J_{ГМ}$  – масса и моменты инерции соответствующих дискретных инерционных элементов;  $A$  – площадь поперечного сечения гидромагистрали;  $\mu_{ГЛ}$ ,  $\mu_{ГН}$  – коэффициенты линейных и нелинейных потерь, соответственно;  $\mu$  – коэффициент вязкого трения;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\varepsilon$  – коэффициент расхода дросселя;  $A_{др}$ ,  $A_{др.п}$  – площади сечений, соответственно, постоянного и переменного дросселей;  $\xi$  – коэффициент местного сопротивления;  $a_w$ ,  $b_w$  – коэффициенты гидромеханических потерь;  $c_{Г}$  – коэффициент жесткости упругого элемента;  $c_{вп}$  – коэффициент жесткости возвратной пружины;  $x$  – координата сосредоточенной массы, взаимодействующей с упругим элементом;  $w$  – количество масс, взаимодействующих с данным упругим элементом;  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  – скорость и ускоренно сосредоточенной массы.

Значения  $\mu_{ГЛ}$  определяются по формулам:

$$\mu_{ГЛ} = \frac{25,2\rho v l}{A}, \quad \mu_{ГЛ} = 0,443\lambda_T \rho l / \sqrt{A} + 0,5gr.$$

Таблица 3.2

**Физические свойства функционально законченных элементов**

Элементы гидропривода	Обозначения элементов	Физические свойства элементов и их математическое описание		
		Инерционные	Диссипативные	Упругие
1. Участок гидромагистрали		$m\ddot{x}$	$(\mu_{ГЛ}\dot{x} + \mu_{ГЛ}x^2 \text{sign}x)$	—
2. Безынерционный участок гидромагистрали		—	$(\mu_{ГЛ}\dot{x} + \mu_{ГЛ}x^2 \text{sign}x)$	—
3. Безынерционный упругий элемент		—	—	$c_r \sum_{j=1}^W (\pm A_j x_j)$
4. Механический подвижный элемент		$m\ddot{x}$	$\mu\dot{x}$	—
5. Возвратная пружина		—	—	$c_{вп}(x_i - x_{i-1})$
6. Постоянный дроссель		—	$\frac{A_{др}}{2} \left( \frac{A\dot{x}}{\epsilon A_{др}} \right)^2 \text{sign}\dot{x}$	—
7. Переменный дроссель		—	$\frac{A_{др}}{2} \left( \frac{A\dot{x}}{\epsilon A_{др}} \right)^2 \text{sign}\dot{x}$	—
8. Обратный клапан		—	$0,5grA\dot{x}^2 \text{sign}\dot{x}$	—
9. Насос		$J_н\ddot{\Phi}_н$	$\alpha_W\dot{\Phi}_н$	—
10. Гидромотор		$J_{ГМ}\ddot{\Phi}_{ГМ}$	$b_W\Phi_{ГМ}$	—

Площадь сечения дросселя зависит от факторов управления  $A_{др.п} = f(x_k, p_k, t)$ , где  $x_k$  – координата регулирующего органа дросселя;  $p_k$  – управляющее давление;  $t$  – время.

Обратный клапан рассматривается как безынерционный элемент переключения. В зависимости от направления скорости потока жидкости и разности давлений на его входе  $p_{вх}$  и выходе  $p_{вых}$  он может находиться в открытом или закрытом состоянии. Условие открытия при  $x = 0$ , тогда  $\text{sign}(p_{вх} - p_{вых}) = 1$ , а условие закрытия при  $x \neq 0$ , т. е.

$$\Pi \text{sign} \dot{x} = -1,$$

где  $x$  – скорость потока жидкости в магистрали, в которой расположен обратный клапан;  $\Pi$  – дискретная функция, характеризующая условие работы клапана:  $\Pi = 1$ , если клапан расположен в магистрали так, что пропускает жидкость только в положительном направлении скорости потока;  $\Pi = -1$  – в противном случае.

Если обратный клапан снабжен возвратной пружиной, то к  $p_{вых}$  добавляется слагаемое  $F_{пр. о. к} / A_{о. к}$ , где  $F_{пр. о. к}$  – усилие пружины обратного клапана;  $A_{о. к}$  – площадь перекрываемого клапаном отверстия – для шарикового или грибкового клапана, или площадь поверхности управляющего элемента – для золотникового клапана.

Для построения математической модели системы необходимо использовать компонентные уравнения функционально законченных элементов и топологические уравнения, выражающие условия равновесия потенциалов и непрерывности фазовых переменных типа потока. Топологические уравнения составляются для узлов взаимодействия элементов. Как следует из табл. 3.2, каждый элемент представляет собой двухполюсник и содержит два узла, отмеченные цифрами 1 и 2. Исключение составляет лишь безынерционный упругий элемент, отображающий упругие свойства газожидкостной смеси и трубопроводов, который содержит только один узел.

В гидромеханической системе взаимодействие функционально законченных элементов осуществляется посредством рабочей жидкости, поэтому в качестве топологического уравнения используется уравнение баланса расходов жидкости в узлах взаимодействия элементов, выражающее условие непрерывности фазовых координат

$$\left( \sum_{i=1}^w Q_i \right)_j = 0, \quad j = \overline{1, u}, \quad (3.34)$$

где  $Q_i$  – расход жидкости  $i$ -го элемента, взаимодействующего с  $j$ -м узлом.

Давление жидкости в каждом узле взаимодействия одинаково для всех функционально законченных элементов, примыкающих к данному узлу.

Расход  $Q_i$  можно выразить через скорость потока жидкости  $\dot{x}_i$  и площадь его поперечного сечения  $A_i$ :  $Q_i = A_i \dot{x}_i$ . Тогда уравнение непрерывности потока для  $j$ -го узла принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^w A_i \dot{x}_i = 0.$$

Топологическое уравнение эквивалентно уравнению позиционной связи

$$\sum_{i=1}^w A_i x_i = 0.$$

Наличие позиционных связей системы приводит к избыточности координат и переопределенности системы уравнений, поэтому избыточность желательно исключить.

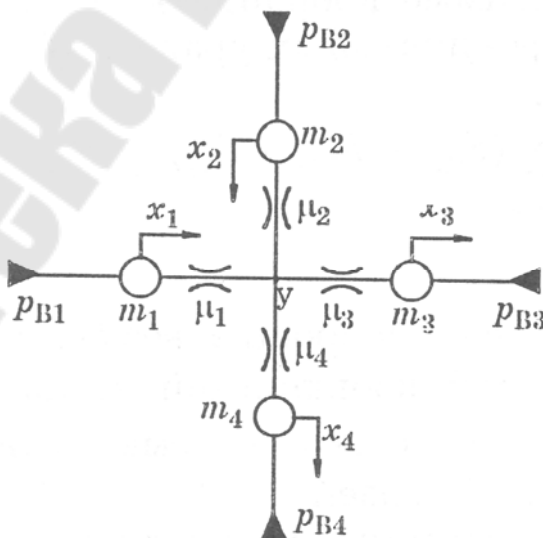


Рис. 3.5. Фрагмент динамической модели гидравлической магистрали с ветвлением в точке  $y$



Рассмотрим порядок исключения избыточных координат на примерах. На рис. 3.5 приведен фрагмент динамической модели системы, отображающей ветвление гидравлической магистрали в точке  $u$ . Участки гидромагистрали, примыкающие к узлу ветвления  $u$ , обладают инерционными и диссипативными свойствами. Упругие свойства жидкости при этом не учитываются. В результате координаты всех инерционных элементов  $x_j$  оказываются взаимосвязанными и число степеней свободы на единицу меньше общего числа координат.

Выберем в качестве зависимой координаты  $x_j$ . Тогда в соответствии с уравнением связи можно записать

$$\sum_{i=1}^s A_i x_i + A_j x_j = 0,$$

где  $s$  – число степеней свободы рассматриваемой подсистемы;  $x_i$  – независимая обобщенная координата;  $x_j$  – зависимая обобщенная координата (на рис. 3.5  $x_i = 4$ ).

Для определения зависимой координаты  $x_j$  получим выражение

$$\sum_{i=1}^s A_i x_i + A_j x_j = 0. \quad (3.35)$$

Предположим, что каждый элемент гидромеханической системы обладает одновременно инерционными, диссипативными и упругими свойствами и подвергается внешнему воздействию  $F_B$ . Движение такого элемента описывается дифференциальным уравнением.

Записав для всех элементов аналогичные уравнения и исключив из них зависимые координаты и их производные, получаем систему дифференциальных уравнений в виде

$$F_{Иi} + F_{Ди} + F_{Уi} + \sum_{j=1}^r (F_{Иij} + F_{Дij} + F_{Уij}) = F_{Bi} + \sum_{j=1}^r F_{Bij}, \quad i = \overline{1, u}, \quad (3.36)$$

где  $F_{Иij}$ ,  $F_{Дij}$ ,  $F_{Уij}$  – составляющие воздействия  $j$ -го элемента с исключенной зависимой координатой  $x_j$  на элемент системы с координатой  $x_i$ ;  $r$  – число исключаемых зависимых координат, равное числу уравнений связей.

Для фрагмента системы, изображенного на рис. 3.5, число степеней свободы  $s = 3$ , число связей  $r = 1$ , а математическая модель его содержит три уравнения вида (3.35) и одно уравнение связи (3.34).

Систему уравнений (3.35) можно представить в виде

$$f_i(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_s, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_s, x_1, x_2, \dots, x_s, t) = 0, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3.37)$$

Уравнения в совокупности с уравнениями связей дают зависимость

$$x_j = \sum_{i=1}^r \frac{A_i}{A_j} x_i, \quad j = \overline{1, r}, \quad (3.38)$$

которая представляют собой математическую модель динамической системы с восемью степенями свободы. Решение этих уравнений позволяет определить все обобщенные координаты системы: независимые  $x_i$  и зависимые  $x_j$ . При этом необходимо задать начальные условия  $x_{i0}, \dot{x}_{i0}, i = \overline{1, s}$ .

Следует отметить, что не каждое уравнение системы (3.35) будет содержать составляющие, стоящие под знаком суммы. Например, если в подсистеме, приведенной на рис. 3.5, учесть упругие свойства газожидкостной смеси и трубопроводов, то в узле взаимодействия элементов появится упругий безинерционный элемент, как показано на рис. 3.6. В результате координаты всех инерционных элементов  $x_i$  окажутся независимыми и уравнения будут иметь следующий вид:

$$F_{Иi} + F_{Ди} + F_{Уi} = F_{Вi}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

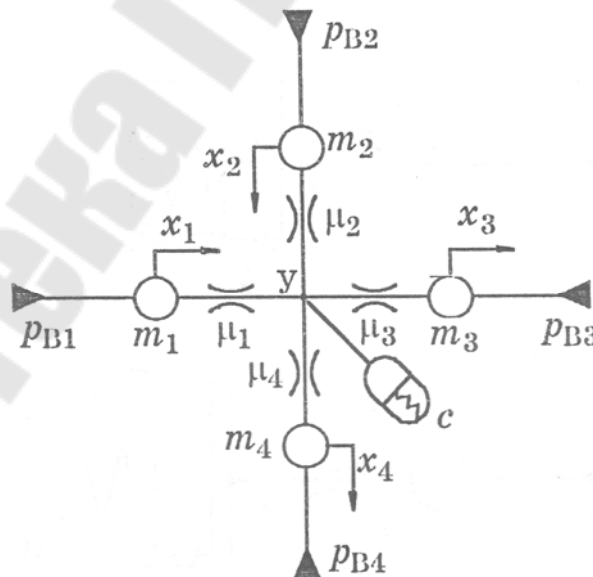


Рис. 3.6. Фрагмент динамической модели гидравлической магистрали с учетом упругих свойств газожидкостной смеси и трубопроводов

Как следует из табл. 3.2, обобщенные координаты  $x_i$  можно задать только тем функционально законченным элементам, которые обладают инерционными свойствами. Математическое описание остальных элементов должно осуществляться с использованием обобщенных координат инерционных элементов.

Динамические модели гидроприводов представляют собой разветвленные разомкнутые цепи, а в системах автоматического управления – замкнутые одноконтурные или многоконтурные цепи. Точки ветвления цепей делят их на отдельные ветви, состоящие из некоторого набора последовательно соединенных функционально законченных элементов. Если в такую ветвь наряду с инерционными элементами входят также безынерционные, то описание последних дается с использованием обобщенных координат примыкающих инерционных элементов.

На рис. 3.7 даны динамические модели фрагментов ветвей. Узлы взаимодействия входящих в них элементов обозначены  $y_i$  – фрагмент ветви на рис. 3.7, *а* включает три функционально законченных элемента: участок гидромагистрали 1, постоянный дроссель 6 и безынерционный упругий элемент 3 (обозначения элементов соответствуют их порядковым номерам, принятым в табл. 3.2).

Поскольку согласно принятым условиям при структурировании элементов постоянный дроссель считается установленным в данный участок гидромагистрали, а безынерционный упругий элемент примыкает к этому участку, то состояние всех элементов ветви определяется координатой сосредоточенной массы жидкости в участке трубопровода  $x_1$ .

Используем координату  $x_1$  и площадь поперечного сечения участка трубопровода  $A_1$  в моделях всех элементов ветви. Решая совместно уравнения этих элементов, получаем дифференциальное уравнение рассматриваемой ветви

$$A_1^{-1} m_1 \ddot{x}_1 + \mu_{\Gamma 11} \dot{x}_1 + \left[ \mu_{\Gamma 11} \dot{x}_1^2 + \frac{\rho}{2} \left( \frac{A_1 \dot{x}_1}{\varepsilon A_{\text{др}}} \right)^2 \right] \text{sign} \dot{x}_1 + c_{\Gamma 3} x_1 = p.$$

Фрагмент схемы на рис. 3.7, *б* также содержит элемент, обладающий инерционными свойствами (механический подвижный элемент 4). Остальные элементы безынерционные, поэтому математическое описание ветви можно составить, используя только одну независимую обобщенную координату  $x_4$ .

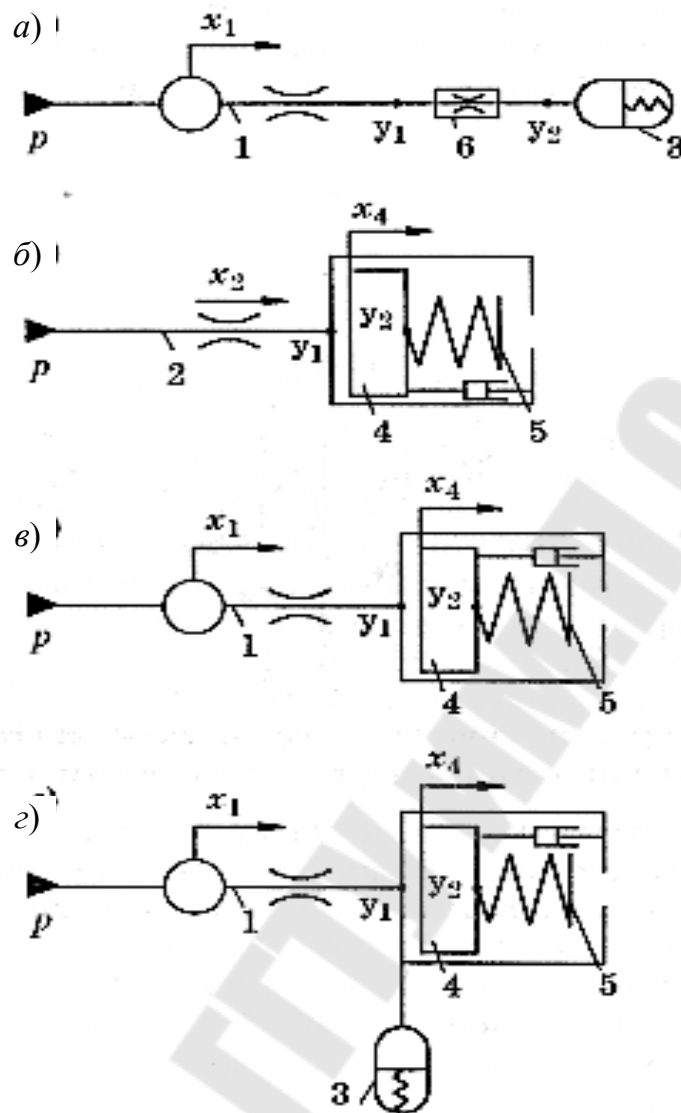


Рис. 3.7. Динамические модели ветвей гидроприводов, состоящих из взаимодействующих функционально заключенных элементов: а – трехзвенная динамическая модель; б – четырехзвенная динамическая модель; в – пятизвенная динамическая модель; г – динамическая модель с двумя независимыми координатами

Выпишем уравнения всех компонентов ветви, обозначив их координаты номерами элементов:

$$(\mu_{\Gamma_{Л2}} \dot{x}_2 + \mu_{\Gamma_{Л2}} \dot{x}_2^2 \text{sign } \dot{x}_2) A_2 = A_2 (p - p_{y1});$$

$$m_4 \ddot{x}_4 + \mu_4 \dot{x}_4 = A_4 p_{y1} - F_{\text{ВП}};$$

$$c_{\text{ВП}} x_4 = F_{\text{ВП}};$$

где  $p_{y1}$  – давление жидкости в узле взаимодействия  $y_1$ ;  $F_{\text{ВП}}$  – усилие возвратной пружины.

Используя топологические уравнения  $\dot{x} = (A_4 / A_2)\dot{x}_4$  и решая совместно компонентные уравнения, получаем дифференциальное уравнение ветви:

$$\frac{1}{A_4}(m_4\ddot{x}_4 + \mu_4\dot{x}_4 + c_{\text{вп}}x_4) + \mu_{\Gamma\text{л}} \frac{A_4}{A_2}\dot{x}_4 + \mu_{\Gamma\text{л}2} \frac{A_4^2}{A_2^2}\dot{x}_4^2 \text{sign } \dot{x}_4 = p.$$

Для фрагмента схемы на рис. 3.7, в аналогичные выкладки приводят к уравнению ветви

$$\frac{1}{A_4} \left[ \left( \frac{A_4^2}{A_1^2} + m_4 \right) \ddot{x}_4 + \mu_4 \dot{x}_4 + c_{\text{вп}} x_4 \right] + \mu_{\Gamma\text{л}1} \frac{A_4}{A_1} \dot{x}_4 + \mu_{\Gamma\text{л}1} \frac{A_4^2}{A_1^2} \dot{x}_4^2 \text{sign } \dot{x}_4 = p.$$

Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемой ветви два инерционных элемента, получен одно дифференциальное уравнение с одной неизвестной  $x_4$ , принятой в качестве независимой обобщенной координаты. Значение координаты  $x_1$  определяется из уравнения связи:  $x_4 = (A_4 / A_1)x_1$ .

Если функционально законченные элементы, обладающие инерционными свойствами, разделены между собой упругим элементом, их координаты оказываются независимыми. Так, динамическая модель ветви гидромеханической схемы, представленная на рис. 3.7,  $z$ , имеет две степени свободы и для ее математического описания необходимо использовать две независимые координаты  $x_1$  и  $x_4$ . В результате получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1^{-1} m_1 \ddot{x}_1 + \mu_{\Gamma\text{л}1} \dot{x}_1 + \mu_{\Gamma\text{л}1} \dot{x}_1^2 \text{sign } \dot{x}_1 + c_{\Gamma 3} x_1 - c_{\Gamma 3} \frac{A_4}{A_1} x_4 &= p, \\ A_1^{-1} (m_4 \ddot{x}_4 + \mu_4 \dot{x}_4 + c_{\text{вп}} x_4) + c_{\Gamma 3} \frac{A_4}{A_1} \left( \frac{A_4}{A_1} x_4 - x_1 \right) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

При формировании математической модели объекта методом функционально законченных элементов система дифференциальных уравнений (3.36) имеет не совсем обычный вид. В отдельные уравнения системы могут входить вторые производные одновременно нескольких обобщенных координат. В этой связи при необходимости приведения их к нормальной форме Коши можно поступить следующим образом. Предполагаем искомыми неизвестными в системе уравнений (3.36) вторые производные независимых обобщенных координат  $\ddot{x}_i$  и для их определения составляем систему неоднородных алгебраических уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + \dots + a_{1s}\ddot{x}_s &= f_1, \\ a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + \dots + a_{2s}\ddot{x}_s &= f_2, \\ \dots & \\ a_{s1}\ddot{x}_1 + a_{s2}\ddot{x}_2 + \dots + a_{ss}\ddot{x}_s &= f_s, \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где  $a_{ki}$  – коэффициенты при искомым переменных  $\ddot{x}_i$ ;  $f_k$  – функции возмущений, определяемые независимыми координатами  $x_i$  и их первыми производными  $\dot{x}_i = v_i$ , а также внешними воздействиями на инерционные элементы системы  $F_{Bi}$  т. е.

$$f_k(v_i, x_i, F_{Bi}, i = \overline{1, s}), k = \overline{1, s}.$$

Решив в общем виде систему уравнений (3.38) и введя обозначение  $\ddot{x}_i = dv_i/dt$ , получим следующую систему дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= f_i(v_k, F_{Bk}, p_l, \quad k = \overline{1, s}, \quad l = \overline{1, q}), \quad i = \overline{1, s}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= f_j(v_k, \quad k = \overline{1, s}), \quad j = \overline{1, q}, \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

где  $p_j$  – давление, определяемое деформацией упругого элемента, расположенного в  $j$ -м узле взаимодействия элементов системы;  $q$  – число узлов, в которых учитываются упругие свойства системы.

Если упругим элементом является возвратная пружина, то его усилие выражается через давление посредством соотношения  $F_{вп} = pA$ , где  $A$  – площадь рабочей поверхности механического подвижного элемента, с которым взаимодействует возвратная пружина.

Переменные  $v_i$  и  $p_j$  являются фазовыми координатами системы гидропривода. При этом количество переменных типа потока равно числу степеней свободы системы.

Задавая начальные условия  $v_{i0}$  и  $p_{j0}$  и интегрируя систему уравнений (3.39), получают искомые функции скоростей движения потоков жидкости и механических элементов гидропривода  $v_i(t)$  и давлений жидкости  $p_j(t)$  в узлах, в которых расположены упругие элементы.

# ГЛАВА 4. СТРУКТУРНО-МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

## 4.1. Основы структурно-матричного метода

Динамическая модель технического объекта, построенная методом сосредоточенных масс, представляется совокупностью взаимодействующих элементов – инерционных, упругих, диссипативных, трансформаторных и фрикционных. Техническую систему, динамическая модель которой может быть представлена совокупностью только инерционных, упругих и диссипативных элементов, назовем простой. Динамическая модель сложной технической системы, кроме этих элементов, содержит трансформаторные и (или) фрикционные элементы. К сложным также относятся механические системы при сложном движении твердых тел.

Математическую модель простой технической системы можно сформировать узловым методом, используя информацию, содержащуюся в матрице инцидентностей. Алгоритм формирования математической модели модифицированным узловым методом описывается системой уравнений.

Первое матричное уравнение системы получено на основе условия равновесия потенциалов ветвей орграфа, инцидентных соответствующим его узлам, и выражает принцип Даламбера. Второе уравнение системы представляют собой матричные компонентные уравнения соответственно упругих и диссипативных элементов системы.

Уравнения относительно производных потоковых переменных  $\frac{dv}{dt}$  также могут быть непосредственно получены с помощью матрицы инцидентностей. Динамическая модель объекта (рис. 3.4, а) и орграф (рис. 3.4, в), а матрица инцидентностей дана в табл. 3.1. Математическую модель объекта составляют уравнения (3.22)–(3.25).

Выпишем матрицу инцидентностей анализируемого объекта, включив в ней подматрицу инцидентностей инерционных элементов  $A_{И}$ , так как она в системе уравнений (3.20) не используется. Кроме того, осуществим перестановку подматриц  $A_{Д}$ ,  $A_{У}$  и  $A_{И}$ , поменяв их столбцы местами. Матрица инцидентностей с учетом этих изменений приведена в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Узлы	Ветви						
	Источники потенциала			Упругие		Диссипативные	
	$F_{И1}$	$F_{И2}$	$F_{В1}$	$C_1$	$C_2$	$\mu_1$	$\mu_2$
1	-1	0	0	1	0	1	0
2	0	-1	0	-1	1	-1	1
1*	0	0	1	0	-1	0	-1
Подматрицы	$A_{И}$			$A_{У}$		$A_{Д}$	

Сопоставляя два первых уравнения системы (3.22) с элементами строк табл. 4.1, соответствующими узлам орграфа 1 и 2, легко заметить, что эти уравнения можно получить путем суммирования потенциалов компонентов, инцидентных данным узлам:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^L F_{Вil} + \sum_{j=1}^N F_{Уij} + \sum_{k=1}^K F_{Дik}}{m_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.1)$$

где  $L$  – количество источников внешних воздействий типа потенциала (источников потенциалов);  $N$  – количество упругих элементов системы;  $K$  – количество диссипативных элементов;  $n$  – количество сосредоточенных масс системы, равное числу ее степеней свободы.

Наличие или отсутствие источников потенциалов, упругих и диссипативных элементов, а также направления сигналов в ветвях орграфа определяются соответствующими инциденторами И, значения которых содержатся в матрице инциденций. Поэтому выражение (4.1) можно записать в таком же виде, как и выражения для компонентных уравнений. В результате уравнения (3.20) и (3.21) модифицированного узлового метода можно привести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= \frac{\sum_{i=1}^L \mathbb{I}_{Вil} F_{Вl} + \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{Уij} F_{Уj} + \sum_{k=1}^K \mathbb{I}_{Дik} F_{Дk}}{m_i}, \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{dF_{Уj}}{dt} &= -c_j \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{Уij} v_i, \quad j = \overline{1, N}; \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$



$$F_{Дk} = -\mu_k \sum_{i=1}^n I_{Дik} v_i, \quad k = \overline{1, K}; \quad (4.3)$$

$$F_{Вm}^* = - \left( \sum_{j=1}^N I_{Yij} F_{Yj} + \sum_{k=1}^K I_{Дik} F_{Дk} \right), \quad m = \overline{1, M}, \quad (4.4)$$

где  $M$  – количество источников внешних воздействий типа потока;  $F_{Вm}$  – реакция внешней среды, генерирующей  $m$ -й источник потока.

Уравнения (4.2)–(4.4) описывают алгоритм структурно-матричного метода формирования математических моделей простых технических объектов.

При использовании этого метода уравнения динамического равновесия потенциалов  $d\bar{v}/dt = \bar{f}(\bar{F}_В, \bar{F}_Y, \bar{F}_Д)$  и выражения для определения реакций внешней среды  $\bar{F}_В^* = \bar{f}(\bar{F}_Y, \bar{F}_Д)$ , алгебраически суммируя потенциалы ветвей орграфа по строкам матрицы инцидентий, а компонентные уравнения упругих и диссипативных элементов, – суммируя потоковые переменные узлов орграфа по соответствующим столбцам матрицы инцидентий. При этом, как следует из уравнений (4.2)–(4.4), слагаемые компонентных уравнений и выражений для определения  $\bar{F}_В^*$  необходимо умножить на минус единицу. Основу структурно-матричного метода формирования математических моделей, так же как и узлового, составляет матрица инцидентий, которая представляет собой матричную форму математической модели. Однако этот метод несравненно проще узлового, так как исключает необходимость выполнения сложной вычислительной процедуры перемножения матриц. Алгоритм структурно-матричного метода легко реализовать на ЭВМ и, следовательно, обеспечить автоматизацию процесса построения моделей. Метод отличается очевидной наглядностью в отображении структуры технической системы и ее взаимодействия с внешней средой. Он превосходно иллюстрирует полное соответствие между математическими моделями в матричной форме и инвариантной, т. е. в форме систем дифференциальных и алгебраических уравнений.

## **ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФАКТОРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

### **5.1. Особенности экспериментальных факторных моделей**

Наряду с теоретическими математическими моделями при функциональном проектировании технических систем широко применяются экспериментальные факторные математические модели.

Теоретические модели имеют то преимущество, что они непосредственно описывают физические свойства технической системы. Коэффициенты уравнений теоретических моделей представляют собой параметры элементов технической системы (внутренние параметры системы) или некоторые комбинации этих параметров, а зависимые переменные – фазовые координаты системы. Они позволяют осуществлять имитационное моделирование процессов функционирования технической системы во времени, детально изучать изменение фазовых координат в зависимости от внешних воздействий (возмущающих и управляющих), анализировать устойчивость системы, качество переходных процессов, эффективность функционирования в условиях случайных внешних воздействий, близких к реальным, т. е. оценивать ее функциональную работоспособность и выполнение технических требований к системе.

Но функциональные теоретические модели сложных технических объектов представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений высокого порядка (обычно не ниже тридцатого порядка). Однократное решение такой системы уравнений на самых современных ЭВМ требует значительной затраты машинного времени (десятки и даже сотни минут). Следует при этом учитывать, что задачи проектирования носят ярко выраженный оптимизационный характер. Целью функционального проектирования является выбор структуры на основе некоторого множества вариантов и определение оптимальных параметров технического объекта. Процедуры выбора структуры и оптимизационные алгоритмы требуют выполнения множества итераций, количество которых может достигать чисел второго и третьего порядков, причем, на каждой итерации решается исходная система дифференциальных уравнений. Поэтому решение одной проектной задачи характеризуется огромными затратами машинного времени. Этим объясняется медленное внедрение методов функционального проектирования в конструкторских организациях. Вместе

с тем без выполнения работ по функциональному проектированию невозможно обеспечить высокий технический уровень и конкурентоспособность создаваемых сложных технических объектов.

Затраты машинного времени можно значительно сократить, если на этапе оптимизации параметров использовать экспериментальную факторную математическую модель. *Экспериментальные факторные модели*, в отличие от теоретических, не используют физических законов, описывающих происходящие в объектах процессы, а представляют собой некоторые формальные зависимости выходных параметров от внутренних и внешних параметров объектов проектирования.

Экспериментальная факторная модель может быть построена на основе проведения экспериментов непосредственно на самом техническом объекте (*физические эксперименты*), либо *вычислительных экспериментов* на ЭВМ с теоретической моделью. При создании новых технических объектов физический эксперимент проводится на прототипах или аналогах, а иногда на макетных образцах. Однако физические эксперименты требуют огромных затрат материальных и временных ресурсов, поэтому их выполняют обычно в тех случаях, когда возникает необходимость поиска путей совершенствования существующих технических систем, когда сложность этих систем и условий их функционирования не позволяет надеяться на требуемую точность их математического описания теоретическими методами.

При функциональном проектировании факторные модели наиболее часто получают на основе вычислительных экспериментов на ЭВМ с теоретической моделью.

При построении экспериментальной факторной модели объект моделирования (проектируемая техническая система) представляется в виде «черного ящика», на вход которого подаются некоторые переменные  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$ , а на выходе можно наблюдать и регистрировать переменные  $\vec{Y}$  (рис. 5.1). В число входных переменных  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  входят внутренние и внешние параметры объекта проектирования, подлежащие оптимизации, а выходными переменными «черного ящика» являются выходные параметры объекта, характеризующие его эффективность и качество процессов функционирования, выбираемые в качестве критериев оптимальности. В процессе проведения эксперимента изменение переменных  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  приводит к изменениям выходных переменных  $\vec{Y}$ . Для построения факторной модели необходимо регистрировать эти изменения и осуществить необходимую их статистическую обработку для определения параметров модели.



Рис. 5.1. Схема объекта исследования при построении экспериментальной факторной модели

При проведении физического эксперимента переменными  $\vec{X}$  можно управлять, изменяя их величину по заданному закону. Переменные  $\vec{Z}$  – неуправляемые, принимающие случайные значения. При этом значения переменных  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  можно контролировать и регистрировать с помощью соответствующих измерительных приборов. Кроме того, на объект воздействуют некоторые переменные  $\vec{E}$ , которые нельзя наблюдать и контролировать. Переменные  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называют *контролируемыми и управляемыми*; переменные  $\vec{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$  – *контролируемыми, но неуправляемыми*, а переменные  $\vec{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l)$  – *неконтролируемыми и неуправляемыми*.

Переменные  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  называют *факторами*. Факторы  $\vec{X}$  являются управляемыми и изменяются как *детерминированные переменные*, а факторы  $\vec{Z}$  – неуправляемые, изменяемые во времени случайным образом, т. е.  $\vec{Z}$  представляют собой *случайные процессы*. Пространство контролируемых переменных – факторов  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  – образует *факторное пространство*.

Выходная переменная  $\vec{Y}$  представляет собой вектор зависимых переменных моделируемого объекта. Ее называют *откликом*, а зависимость  $\vec{Y}$  от факторов  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  – *функцией отклика*. Геометрическое представление функции отклика называют *поверхностью отклика*.

Переменная  $Y$  действует в процессе эксперимента бесконтрольно. Если предположить, что факторы  $\vec{X}$  и  $\vec{Z}$  стабилизированы во времени и сохраняют постоянные значения, то под влиянием переменных  $\vec{E}$  функция отклика  $\vec{Y}$  может меняться как систематическим, так и случайным образом. В первом случае говорят о *систематической помехе*, а во втором – о *случайной помехе*. При этом полагают, что случайная помеха обладает вероятностными свойствами, не изменяемыми во времени.

Возникновение помех обусловлено ошибками методик проведения физических экспериментов, ошибками измерительных приборов, неконтролируемыми изменениями параметров и характеристик объекта и внешней среды, включая воздействия тех переменных, которые в принципе могли бы контролироваться экспериментатором, но не включены им в число исследуемых факторов (вследствие трудностей их измерения, по ошибке или незнанию). Помехи могут быть также обусловлены неточностью физического или математического моделирования объектов.

В вычислительных экспериментах объектом исследования является теоретическая математическая модель, на основе которой необходимо получить экспериментальную факторную модель. Для ее получения необходимо определить структуру и численные значения параметров модели.

Под *структурой модели* понимается вид математических соотношений между факторами  $\vec{X}$ ,  $\vec{Z}$  и откликом  $\vec{Y}$ . Параметры представляют собой коэффициенты уравнений факторной модели. Структуру модели обычно выбирают на основе априорной информации об объекте с учетом назначения и последующего использования модели. Задача определения параметров модели полностью формализована. Она решается методами *регрессионного анализа*. *Экспериментальные факторные модели* называют также *регрессионными моделями*.

Регрессионную модель можно представить выражением

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{B}),$$

где  $\vec{B}$  – вектор параметров факторной модели.

Вид вектор-функции  $\vec{\varphi}$  определяется выбранной структурой модели и при выполнении регрессионного анализа считается заданным, а параметры  $\vec{B}$  подлежат определению на основе результатов эксперимента, проводимого в условиях действия помехи  $\vec{E}$ , представляемой в виде аддитивной составляющей функции отклика  $\vec{Y}$  (рис. 5.1).

*Эксперимент* – это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.

*Опыт* – воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов. Опыт – отдельная элементарная часть эксперимента.

Различают эксперименты пассивные и активные. *Пассивным* называется такой эксперимент, когда значениями факторов управлять нельзя, и они принимают случайные значения. Это характерно для многих технических объектов при проведении на них физических экспериментов. В таком эксперименте существуют только факторы  $\vec{Z}$ . В процессе эксперимента в определенные моменты времени измеряются значения факторов  $\vec{Z}$  и функций откликов  $\vec{Y}$ . После проведения  $N$  опытов полученная информация обрабатывается статистическими методами, позволяющими определить параметры факторной модели. Такой подход к построению математической модели лежит в Основе *метода статистических испытаний (Монте-Карло)*.

*Активным* называется такой эксперимент, когда значениями факторов задаются и поддерживают их неизменными на заданных уровнях в каждом опыте в соответствии с планом эксперимента. Следовательно, в этом случае существуют только управляемые факторы  $\vec{X}$ . Однако в связи с тем, что в активном эксперименте также действует аддитивная помеха  $\vec{E}$ , реализации функций отклика  $\vec{Y}$  представляют собой случайные величины, несмотря на то, что варьируемые факторы  $\vec{X}$  детерминированы. Поэтому здесь также, как и в пассивном эксперименте, построение экспериментальной факторной модели требует статистической обработки получаемых результатов опытов.

Основные особенности экспериментальных факторных моделей следующие: они статистические; представляют собой сравнительно простые функциональные зависимости между оценками математических ожиданий выходных параметров объекта от его внутренних и внешних параметров; дают адекватное описание установленных зависимостей лишь в области факторного пространства, в которой реализован эксперимент. Статистическая регрессионная модель описывает поведение объекта в среднем, характеризуя его неслучайные свойства, которые в полной мере проявляются лишь при многократном повторении опытов в неизменных условиях.

## **5.2. Основные принципы планирования эксперимента**

Для получения адекватной математической модели необходимо обеспечить выполнение определенных условий проведения эксперимента. Модель называют *адекватной*, если в оговоренной области

варьирования факторов  $\vec{X}$  полученные с помощью модели значения функций отклика  $\vec{Y}$  отличаются от истинных не более чем на заданную величину.

Методы построения экспериментальных факторных моделей рассматриваются в *теории планирования эксперимента*.

Цель планирования эксперимента – получение максимума информации о свойствах исследуемого объекта при минимуме опытов. Такой подход обусловлен высокой стоимостью как физических, так и вычислительных экспериментов, а также необходимостью построения адекватной модели.

Планирование осуществляют как активного, так и пассивного эксперимента. Планируемый активный эксперимент при прочих равных условиях точнее и информативнее, а иногда и дешевле пассивного. Это следует учитывать при выборе вида эксперимента. В вычислительном эксперименте, в отличие от физического, нет никаких ограничений на выбор управляемых факторов и характер их изменения. Поэтому вычислительные эксперименты обычно всегда реализуются как активные. В дальнейшем будут рассматриваться в основном вопросы, связанные с планированием активных экспериментов.

При планировании активных экспериментов используются следующие принципы:

- отказ от полного перебора всех возможных состояний объекта;
- постепенное усложнение структуры математической модели;
- сопоставление результатов эксперимента с величиной случайных помех;
- рандомизация опытов;
- оптимальное планирование эксперимента.

Детальное представление о свойствах поверхности отклика может быть получено лишь при условии использования густой дискретной сетки значений факторов, покрывающей все факторное пространство. В узлах этой многомерной, сетки находятся точки плана, в которых проводятся опыты. В этом случае в принципе можно получить факторную модель, которая будет практически почти полностью соответствовать исходной теоретической модели. Однако в большинстве случаев при решении практических задач, для которых используется факторная модель, такого детального описания не требуется. Выбор структуры факторной модели основан на постулировании определенной степени гладкости поверхности отклика. Поэтому с целью уменьшения количества опытов принимают небольшое число точек плана, для которых осуществляется реализация эксперимента.

В отсутствие априорной информации о свойствах функции отклика нет смысла сразу строить сложную математическую модель объекта. Если проверка этой модели на адекватность не дает удовлетворительного результата, ее постепенно усложняют путем изменения структуры (например, повышая степень полинома, принятого в качестве факторной модели, или вводя в модель дополнительные факторы и т. д.). При этом используются результаты опытов, выполненных при построении простой модели, и проводится некоторое количество дополнительных опытов.

При большом уровне случайной помехи получается большой разброс значений функции отклика  $\bar{Y}$  в опытах, проведенных в одной и той же точке плана. В этом случае оказывается, что чем выше уровень помехи, тем с большей вероятностью простая модель окажется работоспособной. Чем меньше уровень помехи, тем точнее должна быть факторная модель.

Кроме случайной помехи при проведении эксперимента может иметь место систематическая помеха. Наличие этой помехи практически никак не обнаруживается и результат ее воздействия на функцию не поддается контролю. Однако если путем соответствующей организации проведения опытов искусственно создать случайную ситуацию, то систематическую помеху можно перевести в разряд случайных. Такой принцип организации эксперимента называют *рандомизацией* систематически действующих помех.

Наличие помех приводит к ошибкам эксперимента. *Ошибки* подразделяют на *систематические* и *случайные* в соответствии с наименованиями вызывающих их факторов – помех.

В вычислительных активных экспериментах ошибки характерны только для определяемых значений функций отклика. Если исходить из целей построения факторных моделей на основе теоретических моделей, полагая, что теоретические модели дают точное описание физических свойств технического объекта, а регрессионная модель является ее аппроксимацией, то значения функций отклика будут содержать только случайную ошибку. В этом случае необходимости в рандомизации опытов не возникает.

Рандомизацию опытов осуществляют только в физических экспериментах. Следует отметить, что в этих экспериментах систематическую ошибку может породить наряду с отмеченными в предыдущем параграфе факторами также неточное задание значений управляемых факторов, обусловленное некачественной калибровкой



приборов для их измерения (инструментальная ошибка), конструктивными или технологическими факторами.

К факторам в активном эксперименте предъявляются определенные требования. Они должны:

– быть *управляемыми* (установка заданных значений и поддержание постоянными в процессе опыта);

– *совместными* (их взаимное влияние не должно нарушать процесс функционирования объекта);

– *независимыми* (уровень любого фактора должен устанавливаться независимо от уровней остальных);

– *однозначными* (одни факторы не должны быть функцией других);

– *непосредственно влияющими на выходные параметры*.

В вычислительном эксперименте реализация трех первых требований не создает никаких затруднений, а в физическом эксперименте могут возникнуть сложности и далее невозможность их осуществления, что приведет к необходимости замены активного эксперимента пассивным. Функции отклика должны быть:

1) *численно измеряемыми*;

2) *иметь четкий физический смысл*;

3) *однозначными* (характеризовать только одно свойство объекта);

4) *информативными* (полностью характеризовать определенное свойство объекта);

5) *статистически эффективными* (измеряться с достаточной точностью с целью сокращения дублирования опытов).

### 5.3. План эксперимента

При проведении активного эксперимента задается определенный план варьирования факторов, т. е. эксперимент заранее планируется.

*План эксперимента* – совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

*Планирование эксперимента* – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

*Точка плана* – упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта, т. е. точка факторного пространства, в которой проводится эксперимент. Точке плана с номером  $i$  соответствует вектор-строка  $\vec{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ .

Общая совокупность таких векторов  $\vec{X}_i$ ,  $i = \overline{1, L}$  образует план эксперимента, а совокупность различных векторов, число которых обозначим  $N$ , – спектр плана.

В активном эксперименте факторы могут принимать только фиксированные значения. Фиксированное значение фактора называют *уровнем фактора*. Количество принимаемых уровней факторов зависит от выбранной структуры факторной модели и принятого плана эксперимента. Минимальный  $X_{j \min}$  и максимальный  $X_{j \max}$ ,  $j = \overline{1, n}$  ( $n$  – число факторов) уровни всех факторов выделяют в факторном пространстве находятся все некоторый гиперпараллелепипед, представляющий собой *область планирования*. В области планирования возможные значения факторов, используемые в эксперименте.

Вектор  $\vec{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$  задает точку центра области планирования. Координаты этой точки  $X_j^0$  обычно выбирают из соотношения

$$X_j^0 = \frac{X_{j \max} + X_{j \min}}{2}. \quad (5.1)$$

Точку  $\vec{X}^0$  называют *центром эксперимента*. Она определяет основной уровень факторов  $X_j^0$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Центр эксперимента стремятся выбрать как можно ближе к точке, которая соответствует искомым оптимальным значениям факторов. Для этого используется априорная информация об объекте.

*Интервалом (шагом) варьирования фактора  $X_j$*  называют величину, вычисляемую по формуле

$$\Delta X_j = \frac{X_{j \max} - X_{j \min}}{2}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.2)$$

Факторы нормируют, а их уровни кодируют. В кодированном виде верхний уровень обозначают +1, нижний обозначают –1, а основной – 0. Нормирование факторов осуществляют на основе соотношения

$$x_j = \frac{X_j - X_j^0}{\Delta X_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.3)$$

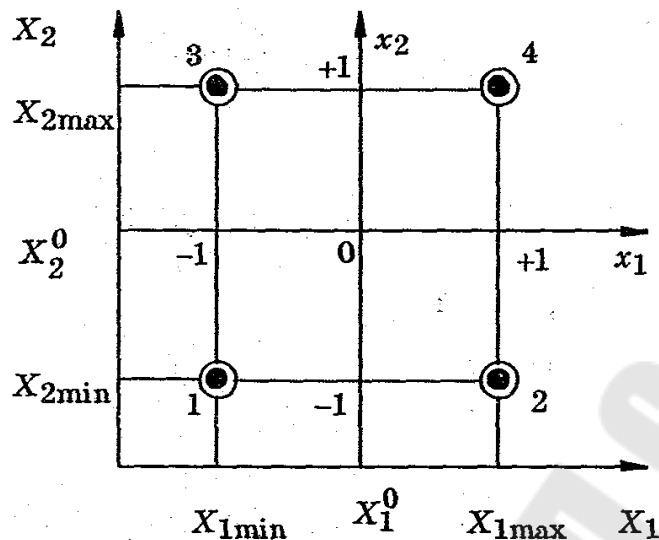


Рис. 5.2. Геометрическое представление области планирования при двух факторах  $X_1$  и  $X_2$

Для переменных  $x_j$ , начало координат совмещено с центром эксперимента, а в качестве единиц измерения используются интервалы варьирования факторов. Геометрическое представление области планирования при двух факторах показано на рис. 5.2. Центр эксперимента находится в точке  $0$  с координатами  $X_1^0, X_2^0$ . Точки  $1-4$  являются точками плана эксперимента. Например, значения факторов  $X_1$  и  $X_2$  в точке  $1$  равны, соответственно,  $X_{1\min}$  и  $X_{2\min}$ , а нормированные их значения  $x_{1\min} = -1, x_{2\min} = -1$ .

В дальнейшем будем предполагать, что в планах активных экспериментов факторы нормированы.

План эксперимента удобно представлять в матричной форме. План эксперимента задается либо матрицей плана, либо матрицей спектра плана в совокупности с матрицей дублирования.

*Матрица плана* представляет собой прямоугольную таблицу, содержащую информацию о количестве и условиях проведения опытов. Строки матрицы плана соответствуют опытам, а столбцы – факторам. Размерность матрицы плана  $L \times n$ , где  $L$  – число опытов,  $n$  – число факторов. При проведении повторных (дублирующих) опытов в одних и тех же точках плана матрица плана содержит ряд совпадающих строк.

*Матрица спектра плана* – это матрица, в которую входят только различающиеся между собой строки матрицы плана. Размерность

матрицы спектра плана  $N \times n$ , где  $N$  – число точек плана, различающихся между собой хотя бы одной координатой  $X_{ij}$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Матрица спектра плана имеет следующий вид:

$$X = \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \dots \\ \vec{X}_i \\ \dots \\ \vec{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1j} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2j} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{Nj} & \dots & X_{Nn} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

где  $X_i$  – вектор, определяющий нормированные значения координат точки плана в  $i$ -м опыте;  $X_{ij}$  – нормированное значение  $j$ -го фактора в  $i$ -м опыте.

*Матрица дублирования* – квадратная диагональная матрица  $m$ , диагональные элементы которой равны числам параллельных опытов в соответствующих точках спектра плана:

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Опыты при выполнении эксперимента проводятся в последовательности, предусмотренной матрицей плана. Эта матрица составляется лишь при необходимости рандомизации опытов, когда в результатах эксперимента можно ожидать наличие систематических ошибок. Для выбора случайной последовательности опытов используется таблица равномерно распределенных случайных чисел. Первое число таблицы выбирают произвольно, желательно случайным образом, а затем, начиная с этого числа, выписывают  $L$  чисел таблицы, где  $L$  – число опытов (с учетом их дублирования). При этом числа, большие  $L$ , а также уже выписанные, отбрасываются.

В вычислительных экспериментах опыты проводят в соответствии с матрицей спектра плана, так как предполагается отсутствие систематических ошибок и поэтому нет необходимости в рандомизации опытов.

## 5.4. Регрессионный анализ

Регрессионный анализ проводится с целью получения по экспериментальным данным регрессионных моделей, представляющих собой экспериментальные факторные модели. Задачей регрессионного анализа является определение параметров экспериментальных факторных моделей объектов проектирования или исследования, т. е. определение коэффициентов уравнений моделей при выбранной их структуре.

Регрессионный анализ включает три основных этапа:

- 1) статистический анализ результатов эксперимента;
- 2) получение оценок  $\vec{b}$  искомых коэффициентов регрессии  $\vec{\beta}$ ;
- 3) оценку адекватности и работоспособности полученной экспериментальной факторной модели технической системы.

Под структурой экспериментальной факторной математической модели понимается вид математических соотношений между факторами  $\vec{X}$ ,  $\vec{Z}$  и откликом  $\vec{Y}$ . В качестве факторов принимают внутренние и внешние параметры технической системы, подлежащие оптимизации в процессе ее проектирования. Внутренние параметры системы – это параметры ее элементов, внешние – параметры внешней среды, в условиях воздействия которой осуществляется функционирование системы.

Функциями отклика  $\vec{Y}$  являются выходные параметры технической системы, характеризующие ее эффективность и качество процессов функционирования. Выходные параметры системы принимаются в качестве критериев оптимальности.

Как уже отмечалось, структура факторной модели выбирается на основе априорной информации с использованием принципа постепенного ее усложнения. Параметры факторной математической модели определяются методами регрессионного анализа. При определении параметров этими методами нет необходимости различать виды факторов, т. е. подразделять факторы на управляемые  $\vec{X}$  и неуправляемые  $\vec{Z}$ . Поэтому в дальнейшем все они будут обозначаться буквой  $\vec{X}$ . Тогда факторную модель можно представить векторным уравнением регрессии вида

$$\vec{Y} = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{B}). \quad (5.6)$$

Определение параметров  $\vec{B}$  этой модели будем рассматривать на примере одного уравнения  $Y = \vec{\varphi}(\vec{X}, \vec{B})$ . Для определения параметров используются результаты эксперимента. Результаты эксперимента можно представить функцией вида

$$Y = \varphi(\vec{X}) + \varepsilon, \quad (5.7)$$

где  $\varepsilon$  – аддитивная помеха случайного характера с нормальным законом распределения.

Так как каждый опыт проводится при определенном сочетании уровней факторов  $X$ , то функцию  $\varphi(\vec{X})$  представим выражением

$$\varphi(\vec{X}) = \sum_{j=0}^d \beta_j f_j(\vec{X}), \quad (5.8)$$

где  $\beta_j$  –  $j$ -й элемент вектора искомых коэффициентов уравнения регрессии:  $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d^T)$ ;  $f_j(\vec{X})$  –  $j$ -я базисная функция – элемент вектора базисных функций  $\vec{f}(\vec{X}) = [f_0(\vec{X}), f_1(\vec{X}), \dots, f_d(\vec{X})]^T$ .

В качестве базисных функций используют полиномы простейших переменных, системы ортогональных полиномов, тригонометрические функции. Наиболее часто пользуются полиномами первой и второй степеней. Например полином первой степени, описывающий функцию отклика  $y$  при двух факторах  $x_1$  и  $x_2$ , может иметь следующий вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad (5.9)$$

или

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2; \quad (5.10)$$

полином второй степени:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + b_4 x_1^2 + b_5 x_2^2. \quad (5.11)$$

Базисные функции в случае использования последнего выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_0(\vec{X}) &= 1; \quad f_1(\vec{X}) = x_1; \quad f_2(\vec{X}) = x_2; \quad f_3(\vec{X}) = x_1 x_2; \\ f_4(\vec{X}) &= x_1^2; \quad f_5(\vec{X}) = x_2^2. \end{aligned}$$

Если уравнение регрессии имеет вид выражений (5.9), (5.10), его называют уравнением *линейной регрессии* (линейной регрессией, или регрессией первого порядка), а если содержит факторы во второй и более высокой степени – *нелинейной регрессией* (регрессией соответствующего порядка).

Линейная регрессия может представлять как линейную математическую модель, так и нелинейную, в зависимости от того, содержит ли она *линейные эффекты* (как в выражении (5.9)), или наряду с ними также *эффекты взаимодействия* (как в выражении (5.10)). Линейным называют эффект, характеризующий линейную зависимость выходного параметра  $y$  от соответствующего фактора  $x_i$ . Эффектом взаимодействия называют эффект, характеризующий совместное влияние нескольких факторов на  $y$  (например, в выражении (5.10)  $x_1x_2$ ). Эффекты взаимодействия двух факторов называют парным взаимодействием, трех факторов – тройным взаимодействием и т. д.

Как всякий статистический метод, регрессионный анализ применим при определенных предпосылках (постулатах).

1. Аддитивная помеха  $\varepsilon$  – случайная нормально распределенная величина с параметрами  $m_\varepsilon = 0$  и  $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$ . В этом случае функция отклика  $Y$  также случайная величина с нормальным законом распределения. Гипотезу о нормальном распределении  $Y$  можно проверить по критерию Пирсона.

2. Постоянство дисперсии помехи означает, что интенсивность ошибки определения  $Y$  не меняется при изменении уровня факторов в процессе эксперимента. Выполнение этого постулата проверяется по критерию однородности дисперсии в разных точках опыта.

3. Значения факторов в активном эксперименте – неслучайные величины. Это означает, что установление каждого фактора на заданном уровне и удерживание его на этом уровне во время опыта точнее, чем ошибка воспроизводимости. В вычислительном эксперименте это выполняется однозначно, а в физическом вклад, вносимый ошибками измерения факторов  $\vec{X}$ , должен быть пренебрежимо малым в сравнении с действием других неконтролируемых факторов, образующих ошибку  $\varepsilon$  определения функции  $Y$ .

4. Значения помехи  $\varepsilon$  в различных точках опыта некоррелированы. Для обеспечения этих требований используется рандомизация опытов.

5. В пассивном эксперименте условие некоррелированности помехи обеспечивают путем соответствующего выбора временного интервала съема информации об условиях и результатах опытов.

6. Векторы-столбцы базисных функций должны быть линейно независимыми. Выполнение этого требования необходимо для получения отдельных оценок  $\vec{b}$  всех коэффициентов регрессии  $\vec{\beta}$ . В активном эксперименте оно обеспечивается соответствующим выбором спектра плана эксперимента. При этом число опытов  $N$  (без учета дублирования) должно быть не меньше, чем число оцениваемых коэффициентов  $N_B$ , т. е.  $N \geq N_B$ .

В пассивном эксперименте линейная зависимость между столбцами практически исключается, так как факторы неуправляемы и принимают случайные значения в различных опытах, но может наблюдаться сильная коррелированность столбцов, что повлечет за собой большие ошибки вычисления коэффициентов регрессии. Для выявления коррелированности столбцов проводят корреляционный анализ результатов пассивного эксперимента.

#### 5.4.1. Оценка параметров регрессионной модели

Исходными данными для получения оценок параметров регрессионной модели технической системы (т. е. оценок  $\vec{b}$  искоемых коэффициентов регрессии  $\vec{\beta}$ ) является информация о значениях управляемых факторов  $\vec{X}$  (или неуправляемых – при проведении пассивного эксперимента) и функции отклика  $Y$ . Эту информацию можно представить в виде матрицы  $X$  значений факторов во всех  $N$  опытах, предусмотренных спектром плана эксперимента, и вектора-столбца  $\vec{Y}$  полученных в этих опытах значений функции отклика  $Y$ :

$$X = \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \\ \dots \\ \vec{X}_j \\ \dots \\ \vec{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} X_{12} \dots X_{1j} \dots X_{1n} \\ X_{21} X_{22} \dots X_{2j} \dots X_{2n} \\ \dots \\ X_{i1} X_{i2} \dots X_{ij} \dots X_{in} \\ \dots \\ X_{N1} X_{N1} \dots X_{Nj} \dots X_{Nn} \end{bmatrix}; \quad (5.12)$$

$$\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_N)^T, \quad (5.13)$$

где  $\vec{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$  – вектор-строка значений факторов в  $i$ -м опыте;  $X_{ij}$  – значение  $j$ -го фактора в  $i$ -м опыте;  $n$  – количество факторов;



$N$  – количество опытов;  $y_i$  – значение функции отклика  $Y$  в  $i$ -м опыте (если проводились параллельные опыты, т. е. осуществлялось дублирование опытов, то вместо  $y_i$  используются оценки их математических ожиданий, т. е. выборочные средние  $\bar{y}_i$ ).

Значения базисных функций во всех опытах представляют собой матрицу  $F$ , называемую матрицей базисных функций

$$F = \begin{bmatrix} \vec{f}_1(\vec{X}_1) \\ \vec{f}_2(\vec{X}_2) \\ \dots \\ \vec{f}_i(\vec{X}_i) \\ \dots \\ \vec{f}_N(\vec{X}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{10}f_{11}f_{12}\dots f_{1k}\dots f_{1d} \\ f_{20}f_{21}f_{22}\dots f_{2k}\dots f_{2d} \\ \dots \\ f_{i0}f_{i1}f_{i2}\dots f_{ik}\dots f_{id} \\ \dots \\ f_{N0}f_{N1}f_{N2}\dots f_{Nk}\dots f_{Nd} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

где  $f_{ik}$  – значение  $k$ -й базисной функции в  $i$ -м опыте;  $\vec{f}_{ik}(\vec{X}_i) = (f_{i0}, f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ik}, \dots, f_{id})$  – вектор-строка значений базисных функций в  $i$ -м опыте.

Используя информацию об  $X$ ,  $\vec{Y}$  и  $F$ , необходимо найти оценки коэффициентов регрессии, представляемые вектором-столбцом

$$\vec{b}^T = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_d), \quad (5.15)$$

где  $b_k$  – значение оценки коэффициента регрессии при базисной функции  $f_k(\vec{X})$ .

Так как функция отклика  $Y$  – случайная величина, поскольку на ее значения в различных опытах оказывает влияние случайная погрешность  $\varepsilon$ , то оценки коэффициентов регрессии будут случайными величинами.

Уравнение регрессии устанавливает зависимость между оценкой математического ожидания функции отклика  $\bar{y}$  и факторами  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Общий вид этой зависимости:

$$\bar{y} = \sum_{k=0}^d b_k k_k(\vec{X}). \quad (5.16)$$

В связи с наличием помехи значение функции отклика в  $i$ -м опыте  $y_i$  будет отличаться от  $\bar{y}_i$ . Для определения  $y_i$  можно составить выражение

$$y_i = b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_k f_{ik} + \dots + b_d f_{id} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5.17)$$

где  $\varepsilon_i$  – невязка уравнения регрессии в  $i$ -м опыте.

Невязка характеризует отклонение значений функции отклика в опытах от получаемых с помощью регрессионной модели (5.16). Она возникает по двум причинам: из-за ошибки эксперимента и из-за непригодности (приближенности) выбранной структуры факторной математической модели. Причем, эти причины смешаны и нельзя сказать, какая из них преобладает.

Если постулировать, что модель пригодна, то невязка будет порождаться только ошибкой опыта. Тогда для определения коэффициентов уравнения (5.16) невязку надо минимизировать. Для этого в регрессионном анализе используется *метод наименьших квадратов (МНК)*. Составляется функция, представляющая собой сумму квадратов невязок, и осуществляется ее минимизация, т. е.

$$E = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \rightarrow \min. \quad (5.18)$$

Подставим значение  $\varepsilon_i$  из выражения (5.17):

$$E = \sum [y_i - (b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_k f_{ik} + \dots + b_d f_{id})]^2 \rightarrow \min. \quad (5.19)$$

В выражении (5.19) коэффициенты  $b_k$  рассматриваются как неизвестные переменные, которые наилучшим образом соответствуют полученным результатам эксперимента. Значения этих коэффициентов, при которых достигается минимум функции  $E$ , принимаются в качестве оценок коэффициентов регрессии. Минимум функции  $E$  имеет место при равенстве нулю частных производных этой функции по переменным  $b_0, b_1, \dots, b_d$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial b_0} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_d f_{id}] f_{i0} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial b_1} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_d f_{id}] f_{i1} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial E}{\partial b_d} &= -2 \sum_{i=1}^N [y_i - b_0 f_{i0} + b_1 f_{i1} + \dots + b_d f_{id}] f_{id} = 0. \end{aligned} \right\}$$

После преобразований получим систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно искоемых оценок коэффициентов регрессии  $b_0, b_1, \dots, b_d$ :

$$\left. \begin{aligned} b_0 \sum_{i=1}^N f_{i0}^2 + b_1 \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{i0} + \dots + b_d \sum_{i=1}^N f_{id} f_{i0} &= \sum_{i=1}^N y_i f_{i0}, \\ b_0 \sum_{i=1}^N f_{i0} f_{i1} + b_1 \sum_{i=1}^N f_{i1}^2 + \dots + b_d \sum_{i=1}^N f_{id} f_{i1} &= \sum_{i=1}^N y_i f_{i1}, \\ \dots &\dots \\ b_0 \sum_{i=1}^N f_{i0} f_{id} + b_1 \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{id} + \dots + b_d \sum_{i=1}^N f_{id}^2 &= \sum_{i=1}^N y_i f_{id}. \end{aligned} \right\} (5.20)$$

Очевидно, что коэффициенты при неизвестных переменных  $\vec{b}$  этой системы уравнений являются элементами матрицы  $\Phi$ , определяемой из выражения

$$\Phi = F^T F, \quad (5.21)$$

в котором  $F$  представляет собой матрицу базисных функций (5.14). Значения элементов матрицы  $F$  известны из проведенного эксперимента. Следовательно, элементы матрицы  $\Phi$  оказываются известными коэффициентами системы уравнений (5.20). Выпишем матрицу  $\Phi$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N f_{i0}^2 & \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{i0} & \dots & \sum_{i=1}^N f_{id} f_{i0} \\ \sum_{i=1}^N f_{i0} f_{i1} & \sum_{i=1}^N f_{i1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^N f_{id} f_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N f_{i0} f_{id} & \sum_{i=1}^N f_{i1} f_{id} & \dots & \sum_{i=1}^N f_{id}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Матрицу  $\Phi$  называют *информационной матрицей Фишера*. Она содержит  $(d+1)$  строк и  $(d+1)$  столбцов, причем, элемент  $j$ -й строки  $k$ -го столбца представляет собой сумму  $\sum_{i=1}^N f_{ij} f_{ik}$ . Матрица  $\Phi$  симметрична относительно главной диагонали, что упрощает составление системы алгебраических уравнений (5.20) для регрессионной модели. Систему уравнений (5.20) можно также записать в матричной форме

$$\Phi \vec{B} = F^T \vec{Y}. \quad (5.23)$$

Система уравнений (5.20) имеет единственное решение, если определитель матрицы  $\Phi$  не равен нулю. В этом случае матрица  $\Phi$  будет не вырожденной. Выполнение пятой предпосылки регрессионного анализа, изложенной в пункте 5.4, исключает возникновение вырожденности.

Решение системы уравнений (5.20) обычно осуществляют методом Гаусса. При небольшом числе определяемых коэффициентов  $b_k$  можно использовать правило Крамера.

Полученные методом наименьших квадратов оценки  $b_0, b_1, \dots, b_d$  Действительных значений коэффициентов регрессии  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d$  обладают следующими свойствами:

1) математические ожидания оценок:  $M[b_j] = \beta_j, j = \overline{0, d}$ , т. е. оценки  $b_j$  несмещенные;

2) дисперсии оценок коэффициентов регрессии минимальны и равны:

$$\sigma_{b_j}^2 = M\{(b_j - M[b_j])^2\} = M\{(b_j - \beta_j)^2\} = \sigma_\varepsilon^2 C_{jj}, \quad (5.24)$$

а корреляционный момент

$$\mu_{11}(b_j, b_k) = M\{(b_j - M[b_j])(b_k - M[b_k])\} = M\{(b_j - \beta_j)(b_k - \beta_k)\} = \sigma_\varepsilon^2 C_{jk}, \quad (5.25)$$

где  $C_{jj}, C_{jk}$  – элементы матрицы  $\Phi^{-1}$ , обратной к информационной;  $\sigma_\varepsilon^2$  – дисперсия случайной помехи; оценки  $b_0, b_1, \dots, b_d$  подчиняются совместному  $(d + 1)$ -мерному нормальному распределению.

## 5.5. Планы экспериментов и их свойства

Для проведения активных экспериментов разработано множество различных планов. Планы учитывают как особенности структуры регрессионных моделей, так и требования их эффективности с позиций повышения точности получаемых моделей и снижения затрат на проведение эксперимента.

При построении линейных моделей или нелинейных, содержащих только взаимодействия факторов, но без квадратов этих факторов (регрессий первого порядка), каждый фактор можно варьировать только на двух уровнях. Для получения таких моделей используют *планы первого порядка*.

Известно несколько разновидностей планов первого порядка. Эти планы различаются в зависимости от структуры регрессионной

модели. Они предназначены для планирования следующих видов экспериментов: *однофакторного (классического) эксперимента; полного факторного эксперимента; дробного факторного эксперимента.*

Если в регрессионную модель входят факторы в квадрате или с более высокими степенями, то необходимо не менее трех уровней варьирования факторов. При построении квадратичных моделей применяют *планы второго порядка.* Эти планы часто используют в качестве своего ядра какой-либо план первого порядка, который дополняется так называемыми *звездными точками.*

Планы различают по степени насыщенности и композиционное. *План называют насыщенным,* если общее число точек плана равно числу неизвестных параметров регрессионной модели. Такой план позволяет получить экспериментальную факторную модель при минимальных затратах, так как обеспечивает минимум числа опытов.

*План называется композиционным* если в спектр его в качестве составной части входят точки спектра плана, который был реализован при построении более простой модели. Композиционность плана позволяет реализовать принцип постепенного усложнения модели при минимальных затратах, так как при этом используются результаты опытов, выполненных для получения простой модели. Многие планы второго порядка являются композиционными.

Важным свойством плана является его *ортогональность.* У ортогональных планов информационная матрица Фишера  $\Phi$  диагональная, а столбцы матрицы базисных функций  $F$  попарно ортогональны. Для ортогонального плана при заданных значениях диагональных элементов матрицы  $\Phi$  дисперсии  $\sigma_{b_k}^2$  оценок коэффициентов регрессии  $b_k$  минимальны. Причем, эти оценки получаются независимыми, что существенно облегчает их вычисление и анализ.

При изменении вида плана изменяется матрица  $\Phi$ , что влияет на дисперсии оценок коэффициентов регрессии. Различают *D-, A- и E-оптимальные планы.* Они обеспечивают различные формы эллипсоидов рассеивания оценок. *D-оптимальный план* минимизирует обобщенную дисперсию оценок коэффициентов регрессии и обеспечивает минимальный объем эллипсоида их рассеивания. *A-оптимальный план* минимизирует среднюю дисперсию всех оценок, а эллипсоид имеет наименьшую сумму квадратов длин осей. Эллипсоид рассеивания у *E-оптимального плана* имеет минимальную длину своей наибольшей оси.

В зависимости от возможностей предсказания отклика по уравнению регрессии различают планы *ротатабельные* и *униформные*. План называется ротатабельным, если дисперсия предсказания отклика постоянна на фиксированном расстоянии от центра эксперимента. Униформный план обеспечивает практически постоянное ее значение в некоторой области факторного пространства. Свойства ротатабельности или униформности обеспечиваются соответствующим выбором точек матрицы спектра плана. Задача выбора оптимального плана довольно сложная и в большинстве случаев не имеет аналитического решения. Поэтому поиск оптимальных планов обычно осуществляется численными методами на ЭВМ.

Рассмотрим основы построения и основные свойства планов первого порядка.

### 5.6. План однофакторного эксперимента

*Однофакторный (классический)* эксперимент предназначен для получения линейной экспериментальной факторной модели вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n. \quad (5.26)$$

Однофакторный эксперимент предусматривает поочередное варьирование каждого из факторов при фиксированных на некотором уровне значениях остальных факторов. Фактор  $X_i$  варьируют на двух уровнях  $X_{iB}$  и  $X_{iH}$ , а все остальные при этом должны находиться в точке центра эксперимента  $X_j^0, j \neq i$ . Для нормированных факторов  $x_{iB} = -1, x_j = 0$ . С учетом этого составим матрицу спектра плана однофакторного эксперимента:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & +1 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Число точек плана в этом случае  $N = 2n$ , где  $n$  – количество факторов. Точки спектра плана располагаются в центрах граней гиперкуба. На рис. 5.3, *a* показано расположение точек для двумерного случая, а на рис. 5.3, *б* – для трехмерного.

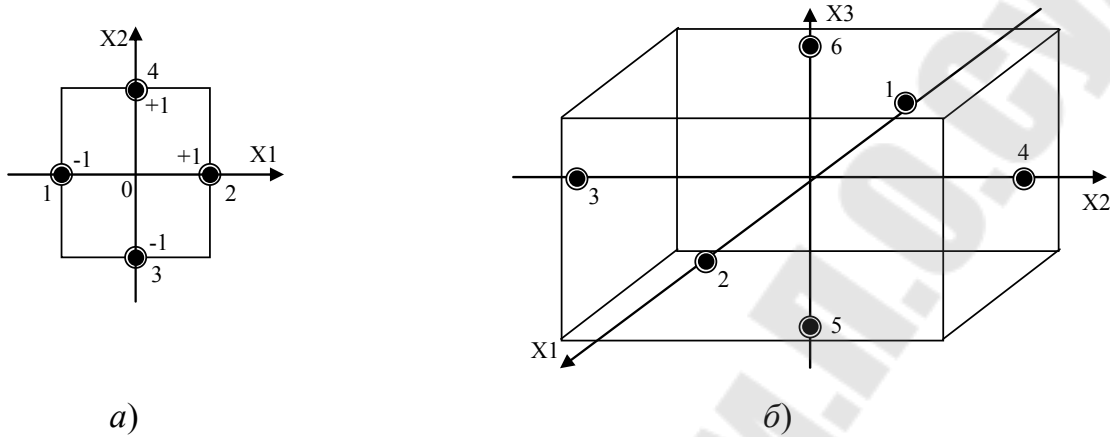


Рис. 5.3. Расположение точек спектра однофакторного эксперимента:  
*a* – при двух факторах; *б* – при трех факторах

Вектор базисных функций имеет следующий вид:

$$\vec{f}(\vec{X}) = (1, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5.28)$$

а матрица  $F$  численных значений базисных функций отличается от матрицы спектра плана  $X$  только одним дополнительным столбцом, соответствующим базисной функции  $f_0 = (\vec{X}) = 1$ :

$$F = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & +1 & 0 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ +1 & 0 & +1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ +1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Матрица базисных функций  $F$  обладает очевидными свойствами:

$$\sum_{i=1}^N f_k(\vec{X}) = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad (5.30)$$

$$\sum_{i=1}^N f_0(\vec{X}) = N = 2n; \quad (5.31)$$

$$\sum_{i=1}^N [f_k(\vec{X}_i)]^2 = 2, \quad k = \overline{1, n}; \quad (5.32)$$

$$\sum_{i=1}^N [f_0(\vec{X}_i)]^2 = 2 = 2n; \quad (5.33)$$

$$\sum_{i=1}^N f_j(\vec{X}_i) f_k(\vec{X}_i) = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{0, n}, \quad (5.34)$$

где  $N$  – число точек спектра плана;  $f_k(\vec{X}_i)$  – значение  $k$ -й базисной функции в  $i$ -м опыте.

Согласно выражению (5.34), векторы-столбцы всех базисных функций попарно ортогональны.

Используя свойства (5.32)–(5.34) и выражение (5.22), можно легко составить информационную матрицу Фишера  $\Phi = F^T F$ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Так как матрица  $\Phi$  диагональная, то план однофакторного эксперимента ортогональный и коэффициенты регрессии некоррелированы друг с другом. Для определения дисперсии оценок коэффициентов регрессии (5.26) вычислим обращенную матрицу Фишера:

$$\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Искомые дисперсии оценок коэффициентов регрессии определяются произведениями дисперсии помехи  $\sigma_\varepsilon^2$  на соответствующие диагональные элементы матрицы  $\Phi^{-1}$ :

$$\sigma_{b_0}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(2n)}; \quad \sigma_{b_k}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.37)$$



Очевидно, что точность получаемой модели в этом случае невысокая, так как коэффициенты регрессии  $b_k$ ,  $k = 1, n$  (кроме коэффициента  $b_0$ ) имеют высокое значение дисперсии. Поэтому однофакторный эксперимент следует признать явно неудовлетворительным для построения модели технической системы. В связи с этим в настоящее время он практически не применяется. Следует отметить, что рассмотренный план обладает свойством ротатабельности.

## 5.7 План полного факторного эксперимента

Спектр плана *полного факторного эксперимента* (ПФЭ) содержит все возможные комбинации значений факторов на всех уровнях их изменения. Число точек  $N$  спектра плана определяется по формуле

$$N = U^n, \quad (5.38)$$

где  $U$  – число уровней варьирования факторов;  $n$  – число факторов.

Рассмотрим особенности и свойства ПФЭ, применяемых при построении линейных регрессий вида

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=j+1}^n b_{j,k} x_j x_k + \sum \sum \sum b_{j,k,l} x_j x_k x_l + \dots + b_{1,2,\dots,n} x_1 x_2 \dots x_n. \quad (5.39)$$

Для получения линейной регрессии достаточно варьировать факторы на двух уровнях, т. е.  $U = 2$ . Тогда число точек спектра плана будет

$$N = 2^n. \quad (5.40)$$

Такой план принято обозначать ПФЭ $2^n$ .

Рассмотрим порядок составления матрицы спектра плана, полагая, что факторы нормированы и, следовательно, могут принимать значения только либо +1, либо –1. Напомним, что столбцы матрицы  $X$  соответствуют значениям факторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Для составления матрицы спектра плана используется следующее простое правило: в первой строке матрицы все факторы равны – 1, в первом столбце знаки единиц меняются поочередно; во втором столбце они чередуются – через 2; в третьем – через 4; в четвертом – через 8 и так далее по степеням двойки. Следовательно, для каждого последующего столбца частота изменения знака в два раза меньше, чем для предыдущего.

Используя изложенное правило чередования знаков, составим матрицы спектров планов для случаев  $n=2$  и  $n=3$ , т. е. для двух и трех факторов.

При  $n=2$  число точек плана  $N=2^2=4$ , а матрица спектра плана имеет следующий вид:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}; \quad (5.41)$$

при  $n=3$  число точек плана  $N=2^3=8$ , матрица  $X$  примет следующий вид:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Спектры планов можно изобразить в привычной для экспериментатора табличной форме. В табл. 5.1 приведен спектр плана ПФЭ<sup>2</sup>, а в табл. 5.2 – спектр плана ПФЭ<sup>3</sup>.

Таблица 5.1

$i$	Факторы	
	$x_1$	$x_2$
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Таблица 5.2

$i$	Факторы		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	+1
3	-1	+1	+1
4	+1	+1	+1
5	-1	-1	-1
6	+1	-1	-1
7	-1	+1	-1
8	+1	+1	-1

В табл. 5.1, 5.2 и в последующем буквой  $i$  обозначен номер точки спектра плана.

Точки плана ПФЭ $2^n$  располагаются в вершинах  $n$ -мерного гиперкуба. На рис. 5.4,  $a$  показано расположение точек для двумерного случая, а на рис. 5.4,  $b$  – для трехмерного.

Посредством ПФЭ можно построить как простейшую линейную модель технической системы вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \quad (5.43)$$

так и нелинейную.

Для модели вида (5.43) система базисных функций очевидна:

$$f_0(\vec{X}) = 1; f_1(\vec{X}) = x_1; f_2(\vec{X}) = x_2 \dots; f_n(\vec{X}) = x_n.$$

Число базисных функций в этом случае равно  $n + 1$ .

Выясним, какие базисные функции могут входить в регрессионную модель, получаемую посредством ПФЭ $2^n$ , чтобы выполнялось требование о линейной независимости векторов-столбцов этих функций. При выполнении этого требования получают отдельные оценки всех коэффициентов регрессии. Линейная независимость столбцов матрицы  $F$  достигается, если в ней отсутствуют полностью совпадающие или полностью противоположные (по знакам) столбцы.

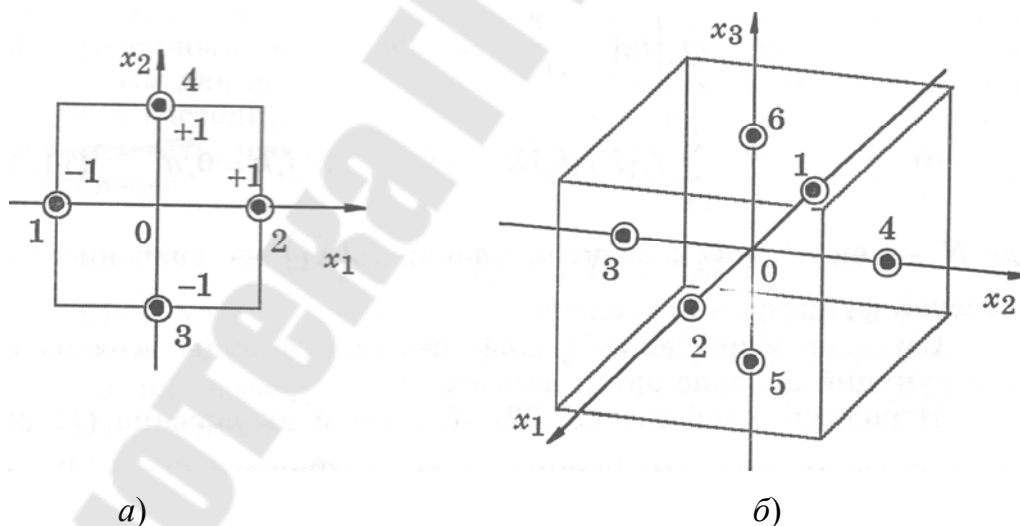


Рис. 5.4. Расположение точек спектра плана ПФЭ $2^n$ :  
 $a$  – при  $n = 2$ ;  $b$  – при  $n = 3$

В общем случае в полиномиальную модель могут входить факторы в любой степени и различные комбинации из их произведений. Так как при нормированных факторах их значения равны  $-1$  или  $+1$ ,

а в качестве показателей степеней факторов принимаются целые числа, то при четных показателях степеней вектор-столбец базисной функции состоит только из +1 и совпадает с вектором-столбцом функции  $f_0(\vec{X})$ , а векторы-столбцы всех базисных функций, соответствующих одним и тем же факторам  $x_j$ , возведенным в любые нечетные степени, будут совпадающими. Вместе с тем легко убедиться, что любые комбинации произведений факторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  могут быть в числе базисных функций.

Выпишем выражения линейных регрессий при  $n = 2$  с учетом всех возможных сочетаний взаимодействия факторов:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2. \quad (5.44)$$

При  $n = 3$  получаем

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + b_7x_1x_2x_3. \quad (5.45)$$

В табл. 5.3 приведены базисные функции плана ПФЭ $2^2$ , используемого для построения регрессионной модели (5.44), а в табл. 5.4 – плана ПФЭ $2^3$ , используемого для модели (5.45).

Таблица 5.3

**Базисные функции плана ПФЭ $2^2$**

$i$	$f_0 = 1$	$f_1 = x_1$	$f_2 = x_2$	$f_3 = x_1x_2$
1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	+1

Таблица 5.4

**Базисные функции плана ПФЭ $2^3$**

$i$	$f_0 = 1$	$f_1 = x_1$	$f_2 = x_2$	$f_3 = x_3$	$f_4 = x_1x_2$	$f_5 = x_1x_3$	$f_6 = x_2x_3$	$f_7 = x_1x_2x_3$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	+1

Уравнение линейной регрессии, как это видно из (5.44) и (5.45), может содержать следующее предельное количество коэффициентов при различных видах базисных функций:

- один коэффициент  $b_0$  – свободный член уравнения регрессии;
- $n$  коэффициентов  $b_j$  – линейных членов уравнения регрессии;
- $C_n^2$  коэффициентов  $b_{j,k}$  при парных взаимодействиях факторов;
- $C_n^3$  коэффициентов  $b_{j,k,l}$  при тройных взаимодействиях факторов;
- один коэффициент  $b_{1,2,\dots,n}$  в взаимодействии факторов максимального,  $n$ -го порядка.

Выражение для определения общего числа коэффициентов регрессии имеет следующий вид:

$$N_B = 1 + n + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2n. \quad (5.46)$$

Так как при использовании всех возможных сочетаний факторов в уравнении регрессии число определяемых коэффициентов  $N_B$  равно числу точек  $N$  спектра плана ПФЭ $2^n$ , то такой план является насыщенным.

Численные значения  $f_j(\vec{X}_i)$ , приведенные в таблице базисных функций, являются элементами матрицы  $F$ . Матрица  $F$  плана ПФЭ $2^n$  обладает следующими свойствами.

1. *Свойство симметричности относительно центра* эксперимента – алгебраическая сумма элементов каждого столбца матрицы базисных функций, кроме столбца  $f_0(\vec{X})$ , равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N f_j(\vec{X}_i) = 0, \quad j = \overline{1, d}, \quad d = N_B - 1, \quad (5.47)$$

где  $f_j(\vec{X}_i)$  – значение  $j$ -й базисной функции, соответствующее  $i$ -й строке матрицы  $F$ ;  $i$  – номер точки спектра плана;  $N$  – число точек спектра плана;  $N_B$  – количество базисных функций.

2. *Свойство ортогональности столбцов* – сумма построчных произведений элементов любых двух столбцов равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N f_j(\vec{X}_i) f_k(\vec{X}_i) = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{0, d}. \quad (5.48)$$

3. Свойство нормировки – сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы базисных функций равна числу точек  $N$  спектра плана:

$$\sum_{i=1}^N [f_j(\vec{X}_i)]^2 = N, \quad j = \overline{0, d}. \quad (5.49)$$

4. Для столбца базисной функции  $f_0(\vec{X})$  сумма элементов также равна  $N$ :

$$\sum_{i=1}^N f_0(\vec{X}_i) = N. \quad (5.50)$$

Выражения (5.47)–(5.50) записаны в предположении, что дублирование опытов не производится.

Составим информационную матрицу Фишера  $\Phi$ , определяемую выражением (5.22). Выражения (5.48) и (5.49) позволяют определить элементы матрицы  $\Phi$ . Очевидно, что для ПФЭ $2^n$  матрица  $\Phi$  диагональная с постоянными диагональными элементами примет следующий вид:

$$\Phi = \begin{bmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Следовательно, ПФЭ $2^n$  относится к классу *ортогональных планов*.

Так как матрица  $\Phi$  диагональная, то корреляционные моменты оценок коэффициентов регрессии  $\mu_{11}(b_j, b_k) = 0$  и оценки всех коэффициентов регрессии  $b_j, j = 1, N$  некоррелированы друг с другом. Кроме того, все коэффициенты регрессии оцениваются с одинаковой точностью, так как диагональные элементы матрицы  $\Phi$  одинаковы. Дисперсия оценок коэффициентов

$$\sigma_{b_j}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{N}. \quad (5.52)$$

Для линейной модели вида (5.43) план ПФЭ $2^n$  является А- и Е-оптимальным и ротатабельным, а для модели (5.39) – D-оптимальным.

## 5.8. План дробного факторного эксперимента

Наряду с отмеченными положительными качествами полного факторного эксперимента он имеет существенный недостаток: увеличение количества факторов приводит к быстрому росту числа опытов, что обусловлено степенной зависимостью (5.38). Например, при  $n = 10$  спектр плана содержит  $N = 2^{10} = 1024$  опыта. Кроме того, необходимо дублирование опытов.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) позволяет построить регрессионную модель, которая учитывает влияние на функцию отклика выбранных факторов и всех возможных сочетаний взаимодействий этих факторов. Но поскольку структура модели выбирается на основе априорной информации о физических свойствах исследуемого объекта, то весьма сложно представить себе влияние на характеристики его функционирования эффектов взаимодействий выше второго или третьего порядка. Обычно при построении многофакторной регрессионной модели ограничиваются парными или, в крайнем случае, отдельными тройными взаимодействиями факторов. В этом случае ПФЭ оказывается избыточным, так как число точек спектра плана  $N$  значительно больше количества коэффициентов регрессии  $N_B$ . В результате возникает возможность сокращения числа опытов. Но при этом, естественно, должно соблюдаться условие возможности оценки коэффициентов регрессии по результатам опытов, которое выражается соотношением  $N \geq N_B$ .

Во многих случаях на начальной стадии моделирования технической системы в связи с отсутствием необходимой информации о влиянии на ее выходные параметры различных факторов (внутренних или внешних параметров) строят линейную модель вида (5.43). Например, при трех факторах выбирают модель в виде

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3. \quad (5.53)$$

В этом уравнении четыре коэффициента регрессии, а при  $n = 3$  спектр плана ПФЭ, согласно выражению (5.40), содержит 8 точек, т. е. предусматривает 8 опытов в различных точках факторного пространства. Следовательно, четыре опыта оказываются избыточными и их можно было бы исключить, естественно, при условии выполнения принятых предпосылок регрессионного анализа, прежде всего ортогональности столбцов матрицы базисных функций  $F$ .

При построении математических моделей, использующих упрощенные уравнения регрессий, когда  $N > N_B$ , применяют *дробные факторные эксперименты* (ДФЭ). Наибольшее распространение имеют регулярные планы ДФЭ типа  $2^{n-p}$ , где  $n$  – число факторов;  $p$  – степень дробности ДФЭ. Планы ДФЭ принято называть *репликами* с указанием их степени дробности. Так, план ДФЭ  $2^{n-1}$  называют полурепликой ПФЭ  $2^n$  (1/2-реплика); ДФЭ  $2^{n-2}$  – 1/4-реплика ПФЭ  $2^n$ ; ДФЭ  $2^{n-3}$  – 1/8-реплика ПФЭ  $2^n$  и т. д. Полуреплика сокращает число опытов в два раза по сравнению с ПФЭ, 1/4-реплика – в четыре раза и т. д.

При построении матрицы спектра плана ДФЭ  $2^{n-p}$  необходимо обеспечить выполнение условий, описываемых выражениями (5.47)–(5.50), принимая во внимание, что число точек спектра этого плана определяется по формуле

$$N = 2^{n-p}. \quad (5.54)$$

Условия (5.47)–(5.50) удовлетворяются, если в матрице базисных функций  $F$  отсутствуют полностью совпадающие или полностью противоположные столбцы, что позволяет получить раздельное оценивание всех коэффициентов регрессии.

При выборе степени дробности ДФЭ должно выполняться условие

$$N \geq N_B. \quad (5.55)$$

Выбранные базисные функции для ДФЭ составляют лишь некоторую часть базисных функций соответствующего ПФЭ. Назовем эти функции *существенными переменными*, характеризующими в наибольшей мере физические свойства технического объекта.

Процедура построения спектра плана ДФЭ  $2^{n-p}$  содержит четыре этапа:

1. Выбор структуры уравнения регрессии и определение степени дробности ДФЭ. При этом исходят из условия выполнения соотношения (5.55).

2. Выбор ведущих факторов и построение для них матрицы спектра плана, определяющего программу их изменения в ходе эксперимента.

Число  $k$  ведущих факторов принимают равным разности между количеством факторов  $n$  и степенью дробности ДФЭ:

$$k = n - p. \quad (5.56)$$



Для выбранных ведущих факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$  строят план ПФЭ $2^k$ , используя изложенное в пункте 5.7 правило чередования знаков.

3. Построение матрицы  $X$  спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$ . Часть этой матрицы составляет матрица спектра плана ПФЭ $2^k$ , а во вторую часть должны войти столбцы матрицы для остальных факторов  $x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  количество которых равно

$$p = n - k. \quad (5.57)$$

Столбцы матрицы  $X$ , соответствующие этим факторам, определяют путем перемножения соответствующих столбцов ведущих факторов. Для этого используют генерирующие соотношения. *Генерирующим соотношением* называется алгебраическое выражение, устанавливающее связь между одним из факторов  $x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  произведением какой-либо комбинации ведущих факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Чтобы получаемые столбцы были ортогональными, для каждого из них задается отдельное генерирующее соотношение (количество этих соотношений равно  $p$ ). Выбор генерирующих соотношений, вообще говоря, произволен. Однако в качестве генерирующих нельзя использовать те произведения ведущих факторов, которые входят в состав существенных переменных, так как в этом случае в матрице базисных функций  $F$  окажутся совпадающие столбцы: для одного из факторов  $x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  одного из взаимодействий факторов из числа существенных переменных.

Генерирующее соотношение имеет следующий вид:

$$x_{k+i} = x_j x_l x_m \dots, \quad i = \overline{1, p}, \quad (5.58)$$

где  $x_{k+i}$  – фактор, не включенный в число ведущих (для него определяется столбец матрицы  $X$  спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$ ;  $x_j, x_l, x_m \dots$  – ведущие факторы.

Количество ведущих факторов, входящих в генерирующее соотношение (5.58), может быть произвольным, но соотношения (5.58) для всех  $x_{k+i}$  должны быть разными.

4. Проверка пригодности полученного спектра плана. Для этого необходимо построить матрицу базисных функций  $F$  и проверить, нет ли в ней совпадающих или полностью противоположных столбцов, т. е. выяснить, обладает ли матрица  $F$  свойством ортогональности столбцов, определяемым выражением (5.48). Если в матрице  $F$  нет

совпадающих или противоположных столбцов, полученный спектр плана ДФЭ $2^{n-p}$  пригоден для решения поставленной задачи. В противном случае, выполняются последовательно следующие процедуры до тех пор, пока не будет обеспечена ортогональность: выбираются иные генерирующие соотношения; изменяется набор ведущих факторов; уменьшается степень дробности плана  $p$ .

При ограниченных возможностях проведения опытов степень дробности плана сохраняют, а изменяют структуру уравнения регрессии (например, используют иные взаимодействия факторов или исключают какую-либо базисную функцию, соответствующую одному из взаимодействий высшего порядка).

Таким образом, регулярные план ДФЭ $2^{n-p}$  обладают теми же свойствами, что и планы ПФЭ $2^n$ . Матрица  $F$  удовлетворяет выражениям (5.47)–(5.50). Информационная матрица Фишера  $\Phi$  диагональная и имеет вид (5.51). Дисперсию оценок коэффициентов регрессии определяют по формуле (5.52). Планы ДФЭ $2^{n-p}$  ортогональны. Для линейных моделей они ротатабельны.  **$A$ - и  $E$ -оптимальны**, а насыщенные планы –  $D$ -оптимальны. Поскольку планы ДФЭ значительно экономичнее планов ПФЭ, они получили широкое практическое применение. В частности их используют для анализа чувствительности целевой функции к вариации параметров технических объектов в процессе их отсеивания и отбора для осуществления оптимизации.

Рассмотрим пример построения плана ДФЭ.

Получить спектр плана ДФЭ, предназначенного для оценки коэффициентов уравнения регрессии вида (5.53).

Так как число факторов в этом уравнении при  $(x_1, x_2, x_3)$ , то при проведении ПФЭ количество точек спектра плана было бы равно  $N = 2^3 = 8$ . В уравнении же (5.53) всего четыре коэффициента, поэтому можно использовать полуреплику, т. е. ДФЭ $2^{3-1}$ , спектр плана которой содержит четыре точки:  $N = 2^{3-1} = 4$ , и, следовательно, условие (5.55) выполняется.

Число ведущих факторов  $k = n - p = 3 - 2 = 1$ . Выберем в качестве ведущих факторов  $x_1$  и  $x_2$ . Значения элементов векторов-столбцов этих факторов получим на основе плана ПФЭ $2^2$ , используя метод чередования знаков. Для определения вектора-столбца фактора  $x_3$  примем генерирующее соотношение в виде  $x_3 = x_1x_2$ . Полученный спектр плана ДФЭ $2^{3-1}$  выделен прямоугольником в табл. 5.5, в которой приведена матрица базисных функций  $F$ .

Матрица базисных функций  $F$ 

$i$	$f_0 = 1$	$f_1 = x_1$	$f_2 = x_2$	$f_3 = x_3$
1	+1	-1	-1	+1
2	+1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1	+1

В матрице  $F$  нет совпадающих столбцов, следовательно, полученный спектр плана пригоден для решения поставленной задачи.

### 5.9. Генерирующие соотношения и определяющие контрасты

Если матрица базисных функций  $F$  плана ДФЭ содержит полностью совпадающие или противоположные столбцы, то это исключает возможность отдельного оценивания коэффициентов регрессии, соответствующих этим столбцам. В этом случае говорят, что имеет место смешанная оценка. Коэффициенты регрессии при этом оказываются коррелированными.

Для выяснения системы смешивания используют определяющие контрасты. *Определяющие контрасты* матрицы  $F$  представляют собой произведения левых и правых частей генерирующих соотношений.

Генерирующее соотношение, устанавливающее связь между фактором  $x_{k+i}$  и ведущими факторами  $x_j, x_i, x_m$ , имеет следующий вид:

$$x_{k+i} = x_j x_i x_m. \quad (5.59)$$

Умножим левую и правую части этого выражения на  $x_{k+i}$ . Учитывая, что элементы столбца матрицы  $F$  при нормированных факторах равны +1 или -1, получим  $x_{k+i} x_{k+i} = 1$ . В результате определяющий контраст будет представлен выражением

$$1 = x_j x_i x_m x_{k+i}. \quad (5.60)$$

Число определяющих контрастов, так же как и число генерирующих соотношений ДФЭ, равно  $p$ . Составив выражения определяющих контрастов для всех генерирующих соотношений и перемножив их левые и правые части, получим *обобщенный определяющий контраст (ООК)*. При этом в правой части полученного произведения может оказаться некоторое количество одинаковых сомножителей, на-

пример,  $m$  сомножителей фактора  $x_j$ . В этом случае следует иметь в виду, что при четном числе сомножителей результат их перемножения равен единице, а при нечетном равен  $x_j$ , т. е.

$$\prod_1^m x_j = 1, \quad m = 2, 4, 6 \dots;$$

$$\prod_1^m x_j = x_j, \quad m = 3, 5, 7 \dots$$

Для определения системы смешивания влияния переменных в ДФЭ обобщенный определяющий контраст умножают на каждую переменную, т. е. на каждую базисную функцию. Если при этом получают одинаковые результаты для какой-либо пары базисных функций, то соответствующие столбцы матрицы  $F$  окажутся совпадающими и оценки коэффициентов регрессии при этих базисных функциях будут коррелированными (смешанными). Такой план ДФЭ непригоден для получения регрессии заданной структуры. В общем случае может оказаться несколько пар совпадающих столбцов матрицы  $F$ .

В табл. 5.6 приведены результаты определения системы смешивания влияния переменных в ДФЭ  $2^{4-1}$ . Здесь использовано одно генерирующее соотношение  $x_4 = x_1 x_2 x_3$ . В результате выражение ООК имеет вид  $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$ .

Таблица 5.6

**Результаты определения системы смешивания влияния переменных в ДФЭ  $2^{4-1}$**

Переменные уравнения регрессии	ООК	Система смешивания
$x_0$	$1 = x_1 x_2 x_3 x_4$	$x_0 = x_1 x_2 x_3 x_4$
$x_1$		$x_1 = x_2 x_3 x_4$
$x_2$		$x_2 = x_1 x_3 x_4$
$x_3$		$x_3 = x_1 x_2 x_4$
$x_4$		$x_4 = x_1 x_2 x_3$
$x_1 x_2$		<u><math>x_1 x_2 = x_3 x_4</math></u>
$x_2 x_3$		<u><math>x_2 x_3 = x_1 x_4</math></u>
$x_3 x_4$		<u><math>x_3 x_4 = x_1 x_2</math></u>

Одинаковые результаты оценок системы смешивания подчеркнуты. Из табл. 5.6 видна смешанность оценок влияния переменных  $x_1 x_2$  и  $x_3 x_4$  на функцию отклика, что не дает возможности осуществить раздельную оценку коэффициентов регрессии при этих переменных.

## 5.10. Статистический анализ результатов активного эксперимента

Прежде чем определять оценки коэффициентов регрессии, необходимо выполнить статистический анализ результатов эксперимента с целью оценки их качества и пригодности для построения регрессионной модели. Статистический анализ включает оценку ошибок параллельных опытов, отсеивание грубых ошибок, проверку однородности дисперсий опытов и определение дисперсии воспроизводимости эксперимента.

**Ошибки параллельных опытов.** В условиях наличия случайных помех с целью уменьшения случайных погрешностей эксперимента и повышения точности получаемой регрессионной модели осуществляется дублирование опытов, т. е. проведение параллельных опытов. Каждый опыт, предусмотренный матрицей спектра плана, повторяется  $m = 2-5$  раз. Рекомендуется число  $m$  принимать одинаковым для всех  $N$  точек плана. В результате проводится  $L = Nm$  опытов, в соответствии с матрицей плана, предусматривающей при этом рандомизацию опытов.

Повторные опыты в одной и той же точке плана при наличии помехи дают различные результаты при определении функции отклика. Разброс результатов относительно оценки математического ожидания функции отклика называют *ошибкой воспроизводимости опыта*. Эту ошибку надо оценить.

Для каждой точки плана по результатам параллельных опытов находят *выборочное среднее*  $\bar{y}_i$ , равное среднему арифметическому полученных опытных значений функции отклика

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5.61)$$

где  $u$  – номер параллельного опыта;  $y_{iu}$  – значение функции отклика в  $u$ -м параллельном опыте  $i$ -й точки спектра плана.

Для оценки отклонения функции отклика от ее среднего значения  $\bar{y}_i$  вычисляется *дисперсия воспроизводимости* опыта по данным  $m$  параллельных опытов в каждой  $i$ -й точке спектра плана:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5.62)$$

При вычислении  $S_i^2$  принимают число степеней свободы  $k$  на единицу меньше, чем число параллельных опытов, т. е.  $k = m - 1$ , так как одна степень свободы уже использована для вычисления  $\bar{y}_i$ . Это обеспечивает несмещенность оценки дисперсии воспроизводимости опыта  $S_i^2$ .

**Отсеивание грубых ошибок.** Формула (5.61) справедлива лишь при нормальном распределении случайной величины  $y$ . При наличии грубых ошибок опыта распределение  $y$  отклоняется от нормального, что противоречит предпосылкам 1 и 2, положенным в основу регрессионного анализа. Поэтому грубые ошибки надо вначале исключить, а затем определять  $\bar{y}_i$  и  $S_i^2$ . Грубые ошибки – это брак повторных опытов. Для обнаружения брака используют  $t$ -критерий Стьюдента

$$t_{iu} = \frac{y_{iu} - y_i^*}{S_i^*}. \quad (5.63)$$

Значения  $\bar{y}_i^*$  и  $S_i^*$  определяются по формулам (5.61) и (5.62), но без учета оцениваемого результата опыта  $y_{iu}$ .

Полученное значение  $t$ -критерия сравнивается с табличным  $t_T$  при выбранном уровне значимости  $q = P[t > t_{k,q}]$  и числе степеней свободы  $k$ . Уровень значимости  $q$  характеризует вероятность ошибки. Если  $t > t_T$ , то это соответствует браку данного опыта и результат его не может быть использован. В этом случае опыт подлежит повторному проведению.

**Проверка однородности дисперсий.** Однородность дисперсии означает, что среди всех дисперсий  $S_i^2$ , нет таких, которые бы значительно превышали все остальные. Для проверки однородности дисперсий во всех точках спектра плана используется либо критерий Кохрена  $G$ , либо критерий Фишера  $F$ .

Критерий Кохрена основан на распределении отношения максимальной дисперсии  $S_{i_{\max}}^2$  к сумме всех дисперсий:

$$G = \frac{S_{i_{\max}}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2}. \quad (5.64)$$

Критерий Кохрена применяется, если количество сравниваемых дисперсий больше двух, а число повторных опытов во всех точках плана одинаково. Определив число степеней свободы  $k_1 = m - 1$  и  $k_2 = N$  ( $N$  – число точек спектра плана,  $m$  – количество повторных опытов в каждой точке плана), находят табличное значение критерия Кохрена  $G_T$ . Если  $G < G_T$ , гипотеза об однородности дисперсий и воспроизводимости результатов принимается. Это означает, что предпосылки 1 и 2, положенные в основу регрессионного анализа, выполняются. В этом случае каждая из дисперсий  $S_i^2$  оценивает одну и ту же дисперсию помехи  $\sigma_\varepsilon^2$ . Следовательно, полученные результаты эксперимента качественные и могут быть использованы для построения регрессионной модели. В противном случае следует увеличить число параллельных опытов или повторить эксперимент при строгом соблюдении методики и схемы проведения опытов, предприняв необходимые меры для исключения грубых ошибок.

Если выяснится, что непостоянство дисперсии помехи  $\sigma_\varepsilon^2$  обусловлено внутренними свойствами объекта, то необходимы более сложные способы обработки результатов эксперимента. Можно, например, вводить некоторую функцию от  $y$ :  $\ln y$ ,  $\sqrt{y}$  и др.

Критерий Фишера можно применять при любом числе дисперсии  $S_i^2$ . Он определяется из соотношения

$$F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}. \quad (5.65)$$

Дисперсии однородны, если  $F < F_T$ , где  $F_T$  – табличное значение критерия Фишера, определяемое при числах степеней свободы  $k_1$  и  $k_2$  и принятом уровне значимости  $q$ .

Следует отметить, что уровень значимости  $q$  по всем критериям, применяемым в процессе статистического анализа и обработки результатов эксперимента (Кохрена, Стьюдента, Фишера), должен быть одинаков. Для технических систем рекомендуется принимать  $q = 0,05$ .

**Дисперсия воспроизводимости эксперимента.** Если дисперсии  $S_i^2$  однородны, то их усредняют и находят *дисперсию воспроизводимости эксперимента*:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (5.66)$$

Дисперсия  $S_y^2$  представляет собой оценку дисперсии помехи  $\sigma_\varepsilon^2$ . Так как число степеней свободы при определении дисперсии  $S_i^2$  равно  $k = m - 1$ , то число степеней свободы, связанное с оценкой  $S_y^2$ , вычисляется по формуле

$$k = N(m - 1). \quad (5.67)$$

Формула (5.67) годится, если число повторных опытов во всех точках спектра плана одинаково. Если число опытов различно, используют формулу

$$S_y^2 = \frac{S_1^2 k_1 + S_2^2 k_2 + \dots + S_N^2 k_N}{k_1 + k_2 + \dots + k_N} = \frac{\sum_{i=1}^N S_i^2}{\sum_{i=1}^N k_i}, \quad (5.68)$$

где  $k_i$  – число степеней свободы в  $i$ -й точке спектра плана;  $k_i = m_i - 1$ ;  $m_i$  – число параллельных опытов в этой точке.

### 5.11. Определение коэффициентов регрессионной модели и проверка их значимости

Параметрами регрессионной модели являются коэффициенты регрессии  $b_j, j = 0, N_B - 1$ , где  $N_B$  – количество базисных функций. Значения коэффициентов регрессии можно получить, решив систему алгебраических уравнений (5.20). В этих уравнениях величина индекса  $d$  в обозначении базисных функций  $f_{id}$  и коэффициента регрессии  $b_d$  равна  $d = N_B - 1$ . Так как информационная матрица Фишера  $\Phi$  для ПФЭ и ДФЭ диагональная (5.51) и все диагональные элементы ее одинаковы и равны  $N$ , то выражение для определения всех коэффициентов уравнения регрессии одинаково и имеет простой вид:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_j(\bar{X}_i) \bar{y}_i, \quad (5.69)$$



где  $N$  – число точек спектра плана;  $f_j(\bar{X}_i)$  значение  $j$ -й базисной функции в  $i$ -й точке спектра плана;  $\bar{y}_i$  – выборочное среднее функции отклика в той же точке, определяемое по формуле (5.61).

Значения базисных функций  $f_j(\bar{X}_i)$  для отдельных факторов равны  $X_{ij}$ , а для взаимодействия факторов –  $X_{ik}X_{il}X_{im}\dots$ . С учетом этого на основе выражения (5.69) можно записать следующие формулы для вычисления значений коэффициентов уравнения регрессии:

– для коэффициентов при факторах  $x_j$  включая также свободный член уравнения:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij} y_i, \quad j = \overline{0, n}; \quad (5.70)$$

– для коэффициентов при взаимодействиях факторов:

$$b_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ik} X_{il} X_{im} \dots \bar{y}_i, \quad g = \overline{n+1, d};$$

$$k, l, m = \overline{1, n}, \quad k \neq l \neq m, \quad (5.71)$$

где  $n$  – количество факторов.

Формулы (5.70) и (5.71) применяются для планов первого порядка. Для плана ПФЭ  $N = 2^n$ , а ДФЭ  $N = 2^{n-p}$ . При определении коэффициента  $b_0$  (свободного члена уравнения регрессии)  $X_{i0} = 1, i = \overline{1, N}$ .

Поскольку полученные значения коэффициентов регрессии  $b_j, j = \overline{0, N_B - 1}$  – случайные числа, в связи с действием случайной погрешности в процессе эксперимента, то они являются оценками истинных значений коэффициентов регрессии  $\beta_j$ . Погрешность определения  $b_j$ , оценивают дисперсией  $S_{b_j}^2$ .

Дисперсии  $S_{b_j}^2$  оценок всех коэффициентов регрессии одинаковы. Величина дисперсии  $S_{b_j}^2$  зависит только от ошибки воспроизводимости эксперимента  $S_y^2$  и числа опытов:

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{(Nm)}, \quad (5.72)$$

где  $m$  – число повторных опытов (значение  $m$  должно быть одинаковым для всех точек  $N$  спектра плана).

После определения коэффициентов регрессии  $b_j$ , проверяют их значимость. Эта проверка осуществляется с использованием  $t$ -критерия Стьюдента, значение которого находят из соотношения

$$t_j = \frac{|b_j|}{S_{b_j}}, \quad j = \overline{0, N_B - 1}, \quad (5.73)$$

где  $N_B$  – общее число коэффициентов уравнения регрессии, равное количеству используемых базисных функций для построения регрессии.

Полученное значение  $t_j$  для каждого коэффициента регрессии  $b_j$  сравнивают с табличным  $t_T$ , определяемым при принятом уровне значимости  $q$  и числе степеней свободы  $k = N(m - 1)$ , с которым определялась дисперсия воспроизводимости  $S_y^2$ . Если  $t_j < t_T$ , нулевая гипотеза о незначимости коэффициента  $b_j$  принимается и член уравнения регрессии, включающий этот коэффициент, исключается из математической модели. Если же  $t_j > t_T$ , полагают, что данный коэффициент значимо (неслучайно) отличается от нуля и его следует сохранить в регрессионной модели. В этом случае значение коэффициента  $b_j$  больше ошибки опыта, которую можно оценить величиной доверительного интервала  $\varepsilon_{b_j}$ . Доверительный интервал находят по формуле

$$\varepsilon_{b_j} = \pm t_T S_{b_j}. \quad (5.74)$$

Следует, однако, отметить, что дисперсия воспроизводимости эксперимента  $S_y^2$  зависит от очень многих факторов: выбора центра эксперимента, интервалов варьирования факторов, наличия экстремумов функции отклика в области планирования, соотношения величины отклика и помехи (так называемое отношение сигнал-шум) и др. В этой связи при небольшом различии между  $t_j$  и  $t_T$  следует весьма осторожно относиться к оценке значимости коэффициентов регрессии. Лучше такие коэффициенты сохранить в модели, а влияние соответствующего фактора (или взаимодействия факторов) проверить в дальнейшем на более сложной модели или в иных условиях планирования эксперимента.

После исключения незначимых коэффициентов уравнение регрессии приобретает следующий вид:

$$\hat{y} = \sum_{j=0}^{N_B^*-1} b_j f_j(\vec{X}), \quad (5.75)$$

где  $N_B^*$  – количество значимых коэффициентов регрессии.

Так как часть коэффициентов регрессии исключено из модели, то  $N_B^* < N_B = d + 1 \leq N$ .

Если все коэффициенты оказались значимыми, суммирование в формуле (5.75) осуществляется до  $N_B - 1$ .

## 5.12. Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели

По уравнению регрессии (5.75) можно вычислить предсказанные значения функции отклика  $y$  всех точек спектра плана:  $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_N$ . В результате будет получено  $N$  значений  $\hat{y}$ :  $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N$ . Если регрессионная модель получена на основе ПФЭ и все коэффициенты регрессии признаны значимыми, то в формуле (5.75)  $N_B^* = N_B = N$ . Тогда значения  $\hat{y}_i$  должны совпадать со средними выборочными значениями  $\bar{y}_i$ , полученными в результате эксперимента для каждой точки спектра плана. Следовательно, поверхность отклика  $Y = \varphi(\vec{X})$  проходит через все точки  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$  и полученная модель адекватна. Значения  $\hat{y}_i$  в этом случае используют для проверки правильности вычислений коэффициентов регрессии.

Если же  $N_B^* < N$ , то в общем случае  $\hat{y}_i < \bar{y}_i$ , а величины их разностей  $(\hat{y}_i - \bar{y}_i)$  несут информацию об ошибках предсказания по уравнению регрессии и их можно использовать для последующего анализа свойств полученной модели – ее адекватности и работоспособности.

Для оценки рассеяния эмпирических значений  $\bar{y}_i$  относительно расчетных  $\hat{y}_i$ , полученных по уравнению регрессии, используют дисперсию адекватности

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m}{N - N_B^*} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2, \quad (5.76)$$

где  $m$  – число параллельных опытов;  $N$  – число точек спектра плана;  $N_B^*$  – количество значимых коэффициентов регрессии.

Если число параллельных опытов в различных точках спектра плана неодинаково, то для вычисления  $S_{ад}^2$ , используют формулу

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{N - N_B^*} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2, \quad (5.77)$$

где  $m_i$  – число параллельных опытов в  $i$ -й точке спектра плана.

Проверка адекватности регрессионной модели осуществляется путем сопоставления дисперсии адекватности  $S_{ад}^2$  и дисперсии воспроизводимости эксперимента  $S_y^2$ . У адекватной модели значение  $S_{ад}^2$  обусловлено в основном действием случайной помехи, поэтому различие между  $S_{ад}^2$  и  $S_y^2$  должно быть небольшим, так как они оценивают одну и ту же дисперсию помехи  $S_y^2$ .

Проверку гипотезы об адекватности модели (гипотезы о равенстве дисперсий  $S_{ад}^2$  и  $S_y^2$ ) выполняют по критерию Фишера:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}. \quad (5.78)$$

В формулах (5.76) и (5.77) учтено, что чем больше число  $m$  параллельных опытов, тем с большей достоверностью оцениваются средние значения функции отклика  $y$ . Поэтому требования к различиям между экспериментальными  $\bar{y}_i$  и расчетными  $\hat{y}_i$  значениями становятся более жесткими, что отражается в увеличении  $F$ -критерия.

Полученные значения статистики  $F$  сравнивают с табличным значением критерия Фишера  $F_T$ , определяемым в зависимости от уровня значимости  $q$  и чисел степеней свободы  $k_1$  и  $k_2$ , с которыми определялись дисперсии  $S_{ад}^2$  и  $S_y^2$ :

$$k_1 = N - N_B^*; \quad (5.79)$$

$$k_2 = N(m - 1). \quad (5.80)$$

Если  $F < F_T$ , регрессионная модель считается адекватной.

Различие между дисперсиями  $S_{ад}^2$  и  $S_y^2$  обусловлено систематической ошибкой при определении функции отклика по уравнению

регрессии из-за его приближенности. Если модель описывает физические свойства исследуемого объекта неудовлетворительно, систематическая ошибка приводит к значительному возрастанию дисперсии адекватности и, следовательно, и к увеличению статистики  $F$ .

При  $F > F_T$  гипотеза адекватности модели отвергается. В таком случае нужно либо изменить структуру математической модели, либо уменьшить интервалы варьирования факторов и провести повторно эксперимент с моделью прежней структуры.

В первом варианте реализуется принцип постепенного усложнения структуры математической модели. Если использовалось упрощенное уравнение регрессии первого порядка, учитывающее влияние на функцию отклика только факторов, или факторов и некоторого количества эффектов их взаимодействий низших порядков, что характерно для ДФЭ, то в модель можно дополнительно ввести новые члены, содержащие другие эффекты взаимодействия тех же порядков или более высоких. Однако во многих случаях такой путь оказывается неэффективным, так как, согласно выражению (5.76), при увеличении количества членов уравнения регрессии и неизменном числе точек спектра плана  $N$  дисперсия адекватности может возрасти, несмотря на снижение разности  $(\bar{y}_i - \hat{y}_i)$  поскольку при этом увеличивается  $N_B^*$  и, следовательно, уменьшается знаменатель выражения (5.76). Кроме того, следует иметь в виду, что с увеличением порядка эффекта взаимодействия возрастает вероятность незначимости коэффициента регрессии  $b_j$  при этом эффекте. В этой связи наиболее целесообразно перейти к планированию второго порядка, используя регрессионное уравнение в виде полного квадратного полинома.

После обеспечения адекватности регрессионной модели осуществляют проверку ее работоспособности.

Адекватность регрессионной модели еще не гарантирует ее пригодность к практическому использованию в задачах прогнозирования и поиска оптимальных решений. Модель может оказаться неработоспособной из-за низкой ее точности. Для проверки работоспособности модели используют *коэффициент детерминации*, представляющий собой числовую интегральную характеристику точности уравнения регрессии. Его значение вычисляют по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{(N - N_B^*)S_{ад}^2 + N(m-1)S_y^2}{m \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + N(m-1)S_y^2}, \quad (5.81)$$

где  $\bar{y}$  – среднее значение отклика:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i. \quad (5.82)$$

Модель считается работоспособной при  $R^2 \geq 0,75$ . В этом случае обеспечивается уменьшение ошибки предсказания, полученного по уравнению регрессии, по крайней мере, в два раза в сравнении с предсказанием по среднему значению отклика  $\bar{y}$ , без учета влияния факторов  $\vec{X}$  на функцию отклика  $y$ .

## **ГЛАВА 6. ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

### **6.1. Принцип локальной оптимизации в методологии проектирования с использованием компьютерных технологий**

Математические модели технических объектов позволяют осуществлять анализ процессов их функционирования, получать оценки выходных параметров различных предлагаемых вариантов технических решений и сравнивать их между собой. Но конечной целью проектирования является получение наилучшего технического решения из числа возможных альтернатив, обеспечивающего высокие показатели эффективности и качества создаваемого объекта. Это достигается в процессе решения задачи синтеза, которая направлена на определение структуры и оптимальных параметров объекта. Методология автоматизированного проектирования основана на системном подходе. Основные принципы этой методологии – декомпозиция, иерархичность, итеративность, локальная оптимизация и комплексное осуществление процесса проектирования.

При декомпозиции сложной технической системы выделяется несколько иерархических уровней, обусловленных различной степенью абстрагирования при описании ее физических свойств. Система расчленяется на отдельные части – блоки, процесс проектирования подразделяется на стадии и этапы. Различают уровневую, блочную и этапную декомпозиции, сочетание которых приводит к иерархической структуре системы автоматизированного проектирования. Каждый компонент этой структуры воплощается в соответствующем

маршруте проектирования, в котором реализуется принцип локальной оптимизации.

Сущность локальной оптимизации заключается в том, что на каждом уровне декомпозиции применяются свои критерии оптимальности и осуществляется оптимизация лишь некоторой части параметров технического объекта, относящихся к внутренним параметрам проектируемого блока. Критериями при этом являются выходные параметры блока, представляющие собой параметры элементов объекта. В свою очередь, внутренние параметры проектируемого блока – это выходные параметры его элементов, получаемых при дальнейшей декомпозиции блока. В результате оказывается, что при проектировании любого элемента объекта используемые критерии получены как результат оптимизации параметров более крупного блока. По существу декомпозиция объекта приводит к декомпозиции критериев. Следовательно, критерии на всех уровнях декомпозиции объекта взаимосвязаны и подчинены конечной цели – достижению высоких показателей эффективности и качества функционирования технического объекта.

Проектирование элементов, выделяемых при декомпозиции объекта, основано на моделировании некоторого характерного режима их функционирования. Это может быть переходный процесс, статическое состояние (состояние покоя или равномерного движения), режим установившихся колебаний, стационарный случайный процесс и др. Система автоматизированного проектирования такого объекта содержит множество маршрутов, отличающихся между собой используемыми математическими моделями. Методы решения систем уравнений этих моделей и способы оценки выходных параметров объектов проектирования существенно различны. Проектные задачи различаются также видами зависимостей критериев от оптимизируемых параметров, количеством используемых критериев и способом формирования целевой функции.

Многообразие исследовательских и проектных задач привело к разработке множества методов оптимизации, обладающих различными свойствами и возможностями поиска экстремума целевой функции с учетом особенностей математических моделей объектов. Проектировщик должен хорошо знать особенности решаемой задачи и свойства существующих методов оптимизации, предвидеть характер изменения целевой функции, что позволит осуществить обоснованный выбор метода и повысить вероятность решения задачи с минимальными затратами.

## 6.2. Основные понятия и определения параметрической оптимизации

Под оптимизацией понимается процесс поиска наилучшего варианта решения некоторой задачи в условиях множества альтернатив. При проектировании технических объектов необходимо найти их структуру и параметры, обеспечивающие наилучшее сочетание показателей качества и эффективности. При этом возникает проблема формализации понятия «наилучший». Для выбора наилучшего варианта среди определенного множества необходимо сформулировать некоторое правило предпочтения. Основой такого правила, может быть, однозначная численная характеристика объекта, представляющая собой скалярную функцию. Эта характеристика содержательно отображает цель поиска, в связи, с чем ее называют целевой функцией. Она позволяет количественно выразить качество объекта и поэтому называется также функцией качества. Таким образом, в основе построения правила предпочтения лежит целевая функция.

Задача параметрической оптимизации технического объекта заключается в поиске параметров, при которых целевая функция достигает экстремального значения. Параметры объекта, доставляющие экстремум целевой функции, называются оптимальными. Если с повышением качества объекта целевая функция возрастает, оптимальные значения параметров соответствуют ее максимуму, в противном случае – минимуму.

Аргументами целевой функции являются управляемые параметры. В качестве управляемых параметров выступают внутренние параметры технического объекта, подлежащие оптимизации. Изменяя соответствующим образом эти параметры в процессе оптимизации, осуществляют поиск экстремума целевой функции.

Обозначим вектор управляемых параметров  $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , а целевую функцию  $F(\vec{X})$ . Поиск решения задачи осуществляется в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$ . Обозначим область определения целевой функции в этом пространстве  $\vec{X}^0$ . Вектор  $\vec{X}$  задает координаты точки в области определения  $\vec{X}^0$ . Если элементы вектора  $\vec{X}$  принимают только дискретные значения, то  $\vec{X}^0$  является дискретным множеством точек и задача оптимизации относится к области дискретного (в частном случае целочисленного) программирования.

Большинство задач параметрической оптимизации технических объектов связано с непрерывным изменением параметров.



Целевая функция  $F(\vec{X})$  может быть представлена геометрически в виде поверхности отклика (или гиперповерхности при  $n > 2$ ). Для выявления свойств целевой функции рассмотрим функцию  $F(\vec{X})$  одной переменной  $x$ . При непрерывном изменении независимой переменной  $x$  функция  $F(x)$  может быть непрерывной (рис. 6.1, а) или разрывной (рис. 6.1, б). Выделим в области определения  $x \in x^0$  целевой функции  $F(x)$  некоторую допустимую область изменения независимой переменной  $x \in x_d$ . Эта область при одной переменной  $x$  соответствует отрезку  $ab$  на оси абсцисс. Если для двух произвольных точек  $x_1$  и  $x_2$ , таких, что  $x_1 < x_2$ , на всем отрезке выполняется условие  $F(x_1) \leq F(x_2)$ , то функция  $F(x)$  на этом отрезке будет монотонно возрастающей (рис. 6.2, а), а если выполняется условие  $F(x_1) \geq F(x_2)$ , то функция  $F(x)$  монотонно убывающая (рис. 6.2, б).

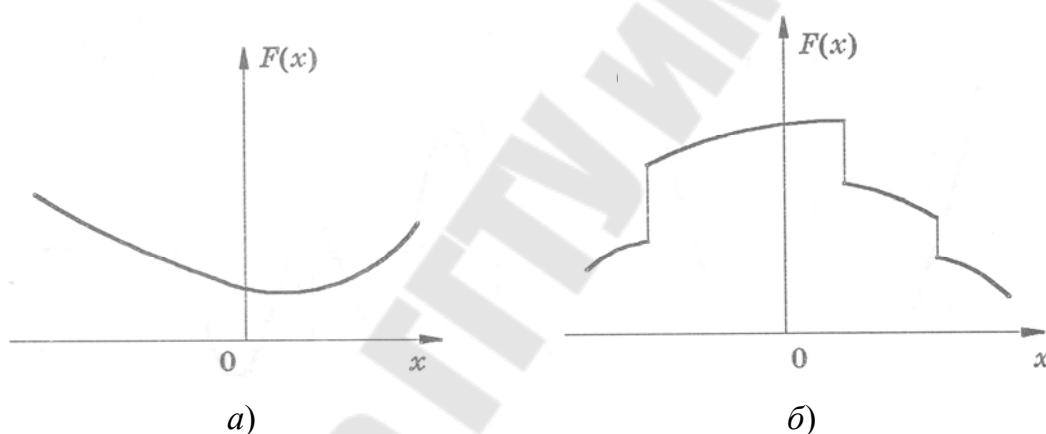


Рис. 6.1. Графики непрерывной (а) и разрывной (б) функций

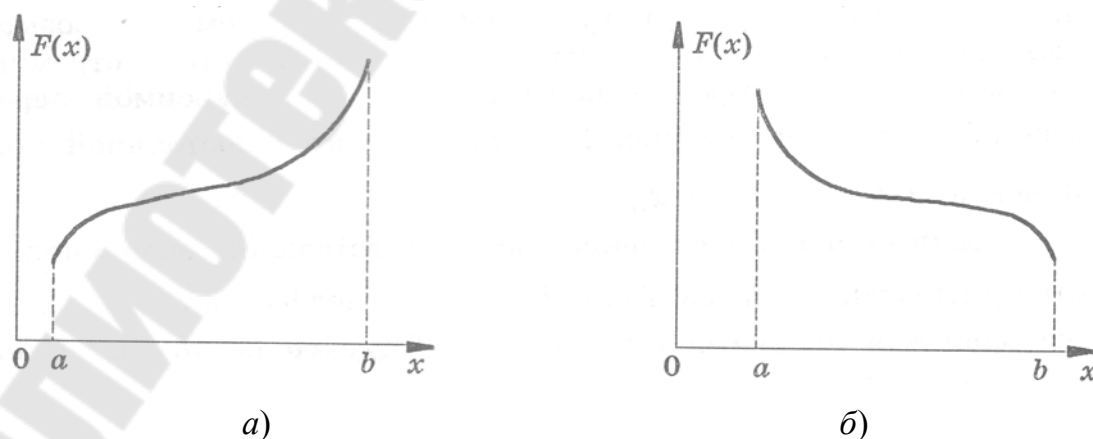


Рис. 6.2. График монотонно возрастающей (а) и монотонно убывающей (б) функций

На графике (рис. 6.3) изображен график функции  $F(x) = x^2$ , которая с увеличением  $x$  монотонно убывает при  $x < 0$  и монотонно возрастает при  $x > 0$ . В точке  $x = 0$  функция  $F(x)$  достигает своего минимума. Такие функции называются унимодальными, или одноэкстремальными.

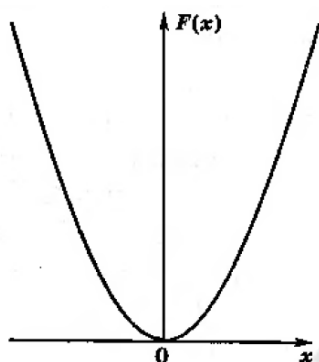


Рис. 6.3 График унимодальной (одноэкстремальной) функции

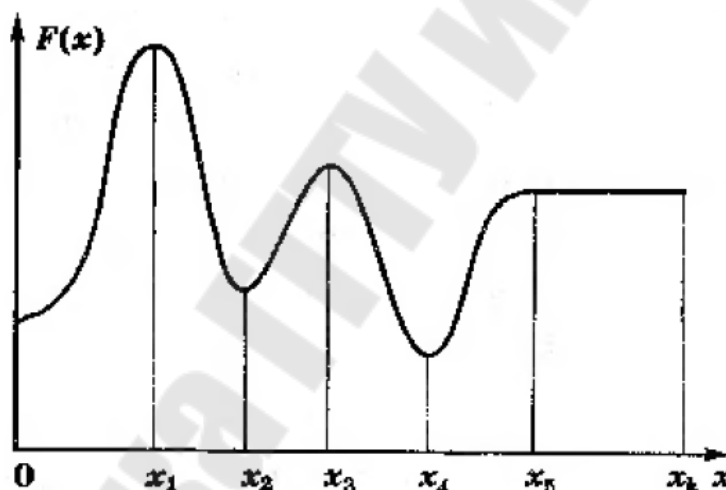


Рис. 6.4. График многоэкстремальной функции

Непрерывная функция может иметь несколько экстремумов, т. е. быть многоэкстремальной (рис. 6.4). В этом случае различают точки глобального экстремума и локальных экстремумов. Так, на рис. 6.4 при значениях  $x_1, x_2, \dots, x_5$  независимой переменной  $x$  возникают экстремумы целевой функции  $F(x)$ , при этом точкам  $x_1$  и  $x_4$  соответствуют глобальные экстремумы (в точке  $x_1$  — максимум функции  $F(x)$ , а в точке  $x_4$  — минимум), а точкам  $x_2, x_3$  и  $x_5$  — локальные экстремумы. Возможен случай, когда локальный (или глобальный) экстремум соответствует некоторой области изменения независимой переменной.

Дискретные значения управляемых параметров характерны для многих технических объектов. Например, диаметры валов трансмиссии выбирают из ряда предпочтительных чисел, номиналы сопротивлений резисторов составляют некоторый дискретный ряд и т. д. В таких случаях при решении задач оптимизации предполагают, что эти параметры могут изменяться непрерывно, а после нахождения оптимальных значений осуществляют выбор из дискретного ряда.

Для оценки точности попадания в заданную точку  $\vec{X}_k$  пространства  $R^n$  введем понятие  $\varepsilon$  – окрестности точки  $\vec{X}_k$ , которой называется множество  $\vec{S}_\varepsilon(\vec{X}_k)$  точек (векторов), находящихся от точки  $\vec{X}_k$  на расстоянии, не превышающем заданное число  $\varepsilon > 0$ :

$$\vec{S}_\varepsilon(\vec{X}_k) = \{ \vec{X} \mid \|\vec{X} - \vec{X}_k\| \leq \varepsilon \}.$$

Функция  $F(x)$ , определенная в допустимой области изменения независимой переменной  $x \in x_d$ , достигает своего глобального минимума в точке  $x^{**} \in x_d$ , если  $F(x^{**}) < F(x)$  для всех  $x \in x_d$ .

Функция  $F(x)$ , определенная на множестве  $x \in x_d$  имеет локальный минимум в точке  $x^* \in x_d$ , если в  $\varepsilon$  – окрестности точки  $x^*$  выполняется условие  $F(x^*) < F(x)$ , где  $x$  – значение независимой переменной, удовлетворяющее условию  $|x - x^*| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  – малая положительная величина, характеризующая точность попадания в экстремальную точку.

Глобальный экстремум можно определить путем нахождения всех локальных экстремумов и их сравнения между собой. Если функция унимодальна, то локальный экстремум автоматически становится глобальным. Если в задаче оптимизации один управляемый параметр  $x$  (задача одномерная), то геометрическим отображением целевой функции является кривая на координатной плоскости  $x, F(x)$  (рис. 6.1–6.4). При двух управляемых параметрах  $x_1$  и  $x_2$  функция  $F(X)$  представляется в виде поверхности в трехмерном пространстве  $x_1, x_2, F(X)$  (рис. 6.5), которую называют поверхностью отклика. Построение поверхности отклика в двумерном случае вызывает определенные трудности, поэтому ее обычно изображают на плоскости в виде линий равных уровней. Такой метод изображения геометрических поверхностей используется в топографии.

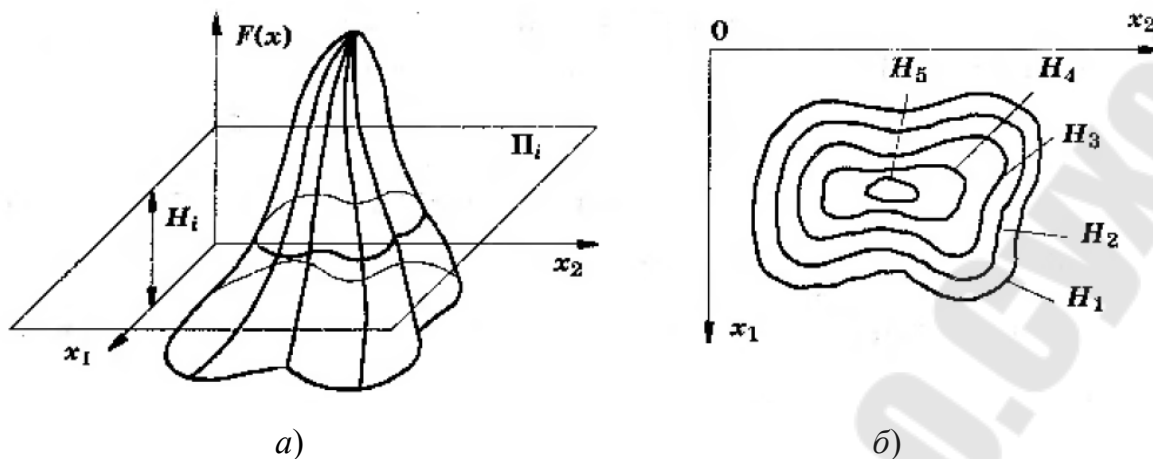


Рис. 6.5. Поверхность отклика:  
 а – двумерной функции; б – отображение на координатной плоскости

К сожалению, геометрическое отображение целевой функции возможно только в одномерном и двумерном случаях. Если экстремум целевой функции отыскивается в неограниченной области  $\vec{X}^0$ , то его называют безусловным экстремумом, а методы его поиска – методами безусловной оптимизации. Однако в задачах проектирования технических объектов, как правило, присутствуют те или иные ограничения. Различают прямые и функциональные ограничения.

Прямые ограничения накладываются на управляемые параметры. Функциональные ограничения подразделяются на два вида: ограничения-неравенства и ограничения-равенства. Прямые ограничения можно рассматривать как частный случай функциональных ограничений. Функциональные ограничения устанавливают некоторые зависимости между управляемыми параметрами, нарушение которых недопустимо по условиям обеспечения работоспособности или регламентируемой эффективности функционирования технического объекта.

Наличие ограничений приводит к задаче условной оптимизации, при которой находится условный экстремум целевой функции. Наложённые ограничения приводят к тому, что поиск оптимального решения ограничивается некоторой областью  $\vec{X}_p$  в пространстве управляемых параметров. При этом область  $\vec{X}_p$  составляет некоторую часть области определения  $\vec{X}^0$  целевой функции. Область  $\vec{X}_p$  пространства управляемых параметров называют областью работоспособности технического объекта.

### 6.3. Определение экстремума аналитической целевой функции

В одномерном случае, если определена функция  $F(x)$  на интервале  $a < x < b$  и  $n$ -кратно дифференцируема на этом интервале, если внутри этого интервала есть точка  $x^*$ , доставляющая локальный экстремум целевой функции, то теорема Тейлора позволяет записать изменение функции  $F$  при переходе от точки  $x^*$  к точке  $(x^* + \varepsilon)$  в виде

$$F(x^* + \varepsilon) - F(x^*) = \varepsilon \frac{dF(x^*)}{dx} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{d^2F(x^*)}{dx^2} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n F(x^*)}{dx^n} + O_{n+1}(\varepsilon),$$

где  $O_{n+1}(\varepsilon)$  – сумма членов ряда, в которых степень  $\varepsilon = n+1$  или больше.

Если  $x^*$  соответствует локальному минимуму функции  $F(x)$ , то должна существовать  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x^*$ , в которой выполняется неравенство  $F(x) > F(x^*)$ . Из этого неравенства следует, что

$$0 \leq \varepsilon \frac{dF(x^*)}{dx} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{d^2F(x^*)}{dx^2} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{d^n F(x^*)}{dx^n} + O_{n+1}(\varepsilon).$$

При достаточно малом значении  $\varepsilon$  первое слагаемое полученного неравенства доминирует над остальными, а так как  $\varepsilon$  можно выбрать и положительным, и отрицательным, поэтому неравенство будет выполняться только при условии, что

$$\left. \frac{dF(x^*)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = 0; \quad \left. \frac{d^2F(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} \geq 0.$$

При определении локального максимума знак неравенства меняется на противоположный:

$$\left. \frac{d^2F(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} \leq 0.$$

Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать необходимые условия локального экстремума. Локальный экстремум дважды дифференцируемой целевой функции находится в точке  $x^*$ , если для этой точки выполняются неравенства. Если эти условия не вы-

полняются, то в рассматриваемой точке  $x$  целевая функция не может иметь экстремума. Однако выполнение условий не гарантирует наличие экстремума.

Точки пространства управляемых параметров, в которых выполняется указанные выше условие, называются стационарными. Если стационарная точка не соответствует локальному экстремуму, то она является точкой перегиба (или седловой точкой) в многомерном пространстве управляемых параметров.

Для того чтобы стационарная точка была точкой экстремума, необходимо выполнение достаточных условий локального экстремума.

Допустим, что в точке  $x^*$  первые  $(m - 1)$  производные целевой функции  $F(x)$  обращаются в нуль, а производная порядка  $m$  не равна нулю. Тогда, используя разложение функции  $F(x)$  в  $\varepsilon$ -окрестности стационарной точки  $x^*$ , нетрудно доказать теорему, согласно которой:

- если  $m$  – нечетное число, то  $x^*$  является точкой перегиба;
- если  $m$  – четное, то  $x^*$  – точка локального экстремума.

Если эта производная положительна, то  $x^*$  – точка локального минимума, а если отрицательна, то точка локального максимума.

#### 6.4. Поисковая оптимизация.

Задачи проектирования технических объектов характеризуются большим количеством оптимизируемых параметров и наличием ограничений, накладываемых на параметры. Они формулируются как задачи многопараметрической условной оптимизации.

Математическая формулировка такой задачи имеет следующий вид:

$$\text{extr}_{\vec{X} \in \vec{X}_p} F(\vec{X}),$$

где  $\vec{X}$  – вектор управляемых (оптимизируемых) параметров технического объекта;  $\vec{X}_p$  – вектор, определяющий область работоспособности, задаваемую ограничениями:

$$\bar{\varphi}(\vec{X}) > 0; \bar{\psi}(\vec{X}) = 0; x_{hi} < x_i < x_{bi}, i = \overline{1, N},$$

где  $\bar{\varphi}(\vec{X}) = |\varphi_j(\vec{X})|$ ,  $j = \overline{1, L}$  – вектор-функция ограничений неравенств;  $\bar{\psi}(\vec{X}) = |\psi_k(\vec{X})|$ ,  $k = \overline{1, M}$  – вектор-функция ограничений равенств;

$N$  – количество прямых ограничений на параметры  $\vec{X}$ ;  $L, M$  – количество функций ограничений неравенств и равенств.

При условии, что функции  $F(\vec{X})$ ,  $\vec{f}(\vec{X})$ ,  $\vec{\psi}(\vec{X})$  – нелинейные, рассматриваемая задача условной оптимизации относится к задачам нелинейного математического программирования, если же они линейны, то эта задача линейного математического программирования.

При проектировании технических объектов используются алгоритмические математические модели. Если оптимизация параметров осуществляется при непосредственном использовании этих моделей в процедурах анализа, то определение значений целевой функции, функций-ограничений и их градиентов осуществляется на основе результатов численного решения системы уравнений модели и вычисления значений выходных параметров объекта, которые являются функционалами фазовых координат объекта. Следовательно, в этом случае отсутствуют аналитические выражения, которые устанавливали бы прямую связь между управляемыми параметрами и функциями, что исключает непосредственное использование приведенных в предыдущем параграфе выражений для определения экстремума.

Для решения задачи в такой ситуации используются поисковая оптимизация, которая состоит в том, что поиск экстремальной точки  $\vec{X}^*$  в пространстве управляемых параметров осуществляется последовательными шагами, ведущими от исходной точки  $\vec{X}_0$  через некоторые промежуточные отображающие точки  $\vec{X}_k$  в заданную  $\varepsilon$  – окрестность точки экстремума  $\vec{X}^*$ . Последовательность отображающих точек  $\vec{X}_k$ , соединенных отрезками прямых, называется траекторией поиска. Переход из точки  $\vec{X}_k$  в точку  $\vec{X}_{k+1}$  представляет собой одну итерацию (или шаг) поиска, обеспечиваемую соответствующим алгоритмом оптимизации. На каждом шаге поиска решается система уравнений, составляющих математическую модель технического объекта, и вычисляются значения выходных параметров, на основе использования которых формируется целевая функция. Нетрудно понять, что поиск оптимального решения таким путем требует огромных затрат машинного времени.

Применение экспериментальных факторных моделей на этапе оптимизаций параметров объекта позволяет сократить эти затраты. Факторные модели представляют собой простые полиномиальные зависимости выходных параметров объекта от его внутренних пара-

метров, подлежащих оптимизации, поэтому решение задачи можно в принципе получить классическими методами, используя необходимые и достаточные условия экстремума. Однако в процессе проектирования регрессионную модель объекта приходится постоянно уточнять, что приводит к изменениям выражений целевой функции, функций ограничений и их производных. В результате оказывается целесообразным использовать поисковые методы оптимизации и в этом случае.

Алгоритм поисковой оптимизации включает следующие этапы:

- 1) задание параметров алгоритма;
- 2) выбор исходной точки поиска  $\vec{X}_0$  и вычисление значения целевой функции в этой точке  $F(\vec{X}_0)$ ;
- 3) определение направления движения в пространстве управляемых параметров;
- 4) осуществление шага поиска: переход из точки  $\vec{X}_k$  в точку  $\vec{X}_{k+1}$ ;
- 5) вычисление целевой функции  $F(\vec{X}_{k+1})$  в новой точке  $\vec{X}_{k+1}$ ;
- 6) оценку успеха поиска: сравнение значений  $F(\vec{X}_k)$  и  $F(\vec{X}_{k+1})$ ;
- 7) изменение параметров алгоритма поиска;
- 8) Проверку условий окончания поиска и если условия окончания поиска не удовлетворяются, то осуществляется переход к этапу 3.

Таким образом, процесс оптимизации представляет собой целенаправленное движение в пространстве управляемых параметров к точке, в которой достигается экстремум целевой функции.

Затраты машинного времени при поисковой оптимизации можно оценить по формуле

$$T_m = T_{m1}(n_1 + n_2)n_3,$$

где  $T_{m1}$  – время, затрачиваемое на один вариант анализа функционирования объекта при фиксированном значении управляемых параметров (при этом решается система уравнений математической модели, определяются выходные параметры объекта, вычисляются значения целевой функции и функций ограничений);  $n_1$  и  $n_2$  – число вариантов анализа объекта соответственно на этапе определения направления поиска и на этапе вычисления целевой функции после осуществления шага поиска;  $n_3$  – число шагов поиска.



Значения  $n_1$  и  $n_2$  определяют потери на поиск и характеризуют эффективность алгоритма оптимизации. К показателям эффективности также относят точность определения экстремальной точки и надежность алгоритма. Под надежностью подразумевается вероятность получения решения задачи с заданной точностью.

## 6.5. Постановка задач оптимизации

Для выполнения функционального проектирования конкретного технического объекта необходимо получить его математическую модель и осуществить постановку задачи оптимизации. Кроме того, необходимо располагать программным обеспечением, реализующим маршрут проектирования, основными процедурами которого являются анализ вариантов и оптимизация параметров.

В иерархической системе автоматизированного проектирования каждый этап должен завершаться формированием технического задания на проектирование подсистем, из которых состоит данный объект. Формирование технического задания осуществляется на основе принципа локальной оптимизации с учетом назначения подсистем объекта и общих целей его создания и использования. В результате задачи проектирования подсистем формируются на основе декомпозиции критериев качества объекта.

Исходная формулировка задач оптимизации носит обычно словесный характер. Постановка задачи оптимизации заключается в формализации понятия «оптимальный». Для этого проектировщик должен быть высококвалифицированным специалистом в данной предметной области и вместе с тем владеть современными методами математического программирования.

Процедура постановки задачи оптимизации носит неформальный характер и включает, следующие этапы: выбор критериев оптимальности, формирование целевой функции, выбор управляемых параметров, назначение ограничений, нормирование управляемых и выходных параметров.

В дальнейшем, как и прежде, под объектом проектирования будем подразумевать любой компонент декомпозиции проектируемой технической системы, по отношению к которому осуществляется локальная оптимизация. Это может быть отдельный блок, элемент блока, техническая система в целом и др.

В качестве критериев оптимальности принимаются выходные параметры объекта проектирования. При этом часто выбирают не все выходные параметры объекта, а только те, которые оказывают наибольшее влияние на достижение конечной цели проектирования всей технической системы. Остальные выходные параметры используются при формировании функций ограничений.

На основе выбранных критериев осуществляется формирование целевой функции.

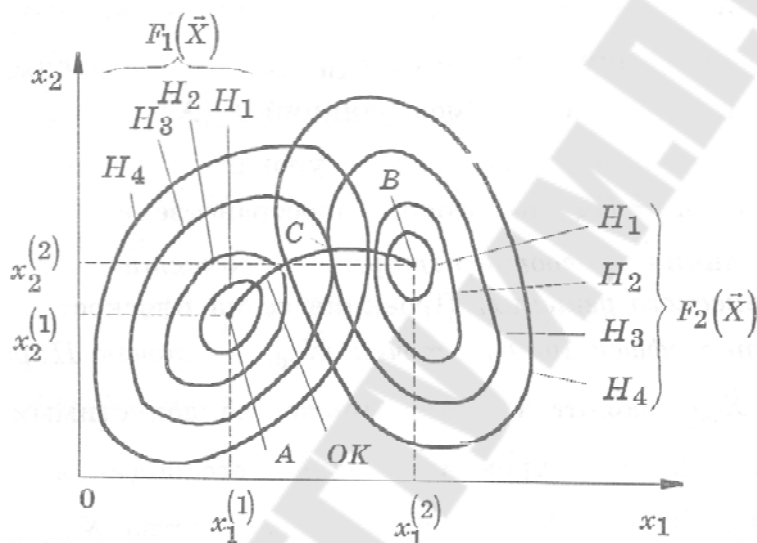
Основная проблема постановки задачи оптимизации заключается в выборе критериев и формировании целевой функции. Выбор критериев оптимальности требует глубокого понимания сущности решаемой задачи. Всесторонняя оценка эффективности и качества объекта возможна при использовании множества критериев. Задача оптимизации в этом случае становится многокритериальной.

Векторный характер критериев оптимальности создает проблему формирования целевой функции. Сложность ее обусловлена не только большим количеством используемых критериев, но и их характером. Обычно улучшение одного из критериев приводит к ухудшению других критериев. Такие критерии называются конфликтными. Если определить оптимальные параметры объекта по каждому из критериев в отдельности, то они окажутся различными. Поэтому при наличии векторного критерия возможно лишь некоторое компромиссное решение, которое в наибольшей мере отвечает задачам проектирования.

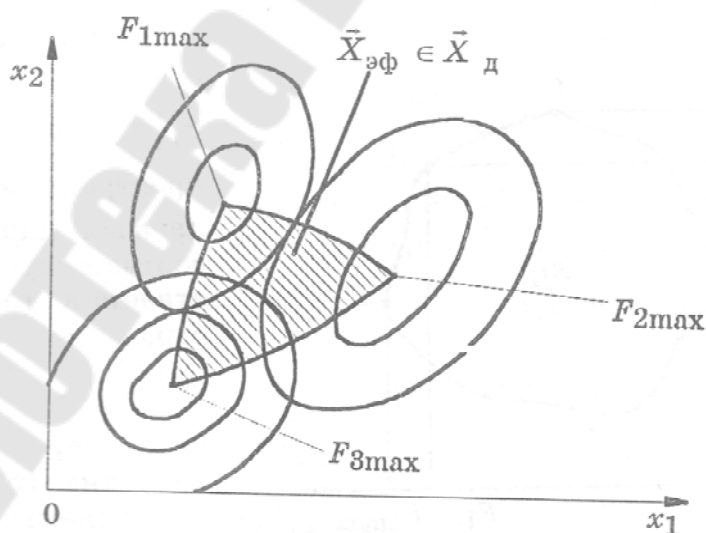
Рассмотрим формирование целевой функции. Предположим, что выбрано два критерия, которые представляют собой некоторые функции  $F_1(\vec{X})$ ,  $F_2(\vec{X})$  управляемых параметров  $\vec{X}$ , а пространство управляемых параметров – двумерное, т. е.  $\vec{X} = (x_1, x_2)^T$ . Построим на плоскости  $x_1 O x_2$  линии равных уровней  $H_i = \text{const}$  функций  $F_1(\vec{X})$ ,  $F_2(\vec{X})$  (рис. 6.6, а).

Если выполняется условие  $H_1 > H_2 > H_3 > H_4$ , то экстремумы функций  $F_1(\vec{X})$ ,  $F_2(\vec{X})$  будут представлять собой максимумы этих функций  $F_{1\max}$  и  $F_{2\max}$ . Точка  $A$  с координатами  $x_1^{(1)}$ ,  $x_2^{(1)}$  соответствует  $F_{1\max}$ , а точка  $B$  с координатами  $x_1^{(2)}$ ,  $x_2^{(2)}$  – экстремуму второго критерия  $F_{2\max}$ . Так как точки  $A$  и  $B$  находятся в трехмерном пространстве  $x_1, x_2, F(X)$ , то третьей координатой точки  $A$  является  $F_{1\max}$ , а точки  $B$  –  $F_{2\max}$ . Соединив точки  $A$  и  $B$  экстремумов функций

$F_1(\bar{X})$ ,  $F_2(\bar{X})$  и точку  $C$  касания линий равного уровня обеих функций  $F_1(\bar{X}) = F_2(\bar{X}) = H_3$  некоторой пространственной линией ОК, получим линию соответствующую области оптимально-компромиссного решения. Проекция ее на плоскость  $x_1 O x_2$  дает множество эффективных точек  $\bar{X}_{\text{эф}}$ , называемых точек Парето. Множество  $\bar{X}_{\text{эф}}$  входит в состав множества допустимых значений управляемых параметров  $\bar{X}_d$ , являясь его подмножеством, т. е.  $\bar{X}_{\text{эф}} \in \bar{X}_d$ . На рис. 6.6, б показано множество  $\bar{X}_{\text{эф}}$  для случая трех критериев.



а)



б)

Рис. 6.6. К выбору оптимально-компромиссного решения в двухкритериальной (а) и трехкритериальной (б) задачах

В силу однозначных зависимостей  $F_i(\vec{X})$  каждой точке в пространстве управляемых параметров  $\vec{X}$  соответствует единственная точка в пространстве функций  $F_i(\vec{X}), i = \overline{1, n}$ . Следовательно, множеству допустимых значений управляемых параметров  $\vec{X}_д$  можно поставить в соответствие эквивалентное замкнутое множество  $S_H$ , а подмножеству  $\vec{X}_{эф}$  – подмножество оптимального компромисса  $S_{ок}$  между критериями  $F_1(\vec{X})$  и  $F_2(\vec{X})$  (рис. 6.7).

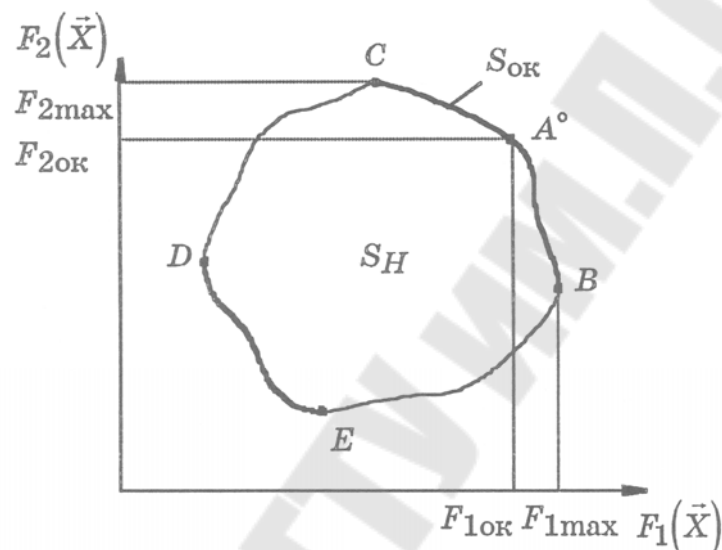


Рис. 6.7. Отображение подмножества оптимального компромисса  $S_{ок}$  двухкритериальной задачи

Точки подмножества  $S_{ок}$  соответствуют возможным сочетаниям значений критериев  $F_i(\vec{X}), i = \overline{1, n}$ , определяющим перспективные варианты решения многокритериальной задачи.

При максимизации критериев подмножеством оптимального компромисса  $S_{ок}$  является правая верхняя граница выпуклой оболочки множества  $S_H$  между точками  $B$  и  $C$ , в которых достигаются  $F_{1макс}$  и  $F_{2макс}$ .

Таким образом, точками Парето являются точки пространства управляемых параметров  $\vec{X}_{эф} \in \vec{X}_д$ , для которых выполняется условие

$$F(\vec{X}_{эф}) = \sum_{j=1}^m c_j F_j(\vec{X}_{эф}) \leq \Phi(\vec{X}),$$

где  $c_j$  – коэффициент веса, характеризующий значимость  $j$ -го критерия;  $\Phi(\vec{X})$  – предельно достижимое значение целевой функции

$F(\overline{X}_{\text{эф}})$  в области оптимального компромисса  $S_{\text{ок}}$ ;  $m$  – количество критериев оптимальности.

Коэффициенты веса выбирают из условия  $\sum_{j=1}^m c_j = 1, c_j > 0$ .

Метод Парето позволяет сбалансировать противоречия между критериями  $F_j(\overline{X})$  и получить однозначное оптимально-компромиссное решение задачи выбора параметров проектируемого объекта.

Приняв определенные значения коэффициентов веса  $c_1$  и  $c_2$  в рассматриваемой задаче и сформировав аддитивную целевую функцию в процессе поисковой оптимизации, можно найти некоторые значения управляемых параметров  $x_{1\text{ок}}$  и  $x_{2\text{ок}}$ , доставляющие экстремум целевой функции  $F(\overline{X})$ . При этом каждый из критериев  $F_1(\overline{X})$  и  $F_2(\overline{X})$  не будет достигать экстремального значения. На подмножестве оптимального компромисса  $S_{\text{ок}}$  (рис, 6.7) полученному решению соответствует некоторая точка  $A^0$ , в которой  $F_{1\text{ок}} < F_{1\text{max}}$  и  $F_{2\text{ок}} < F_{2\text{max}}$ .

При минимизации критериев  $F_1(\overline{X})$  и  $F_2(\overline{X})$  подмножеству оптимального компромисса  $S_{\text{ок}}$  соответствует линия  $DE$  (рис. 6.7). В зависимости от вида математической модели технического объекта критерии могут быть детерминированные или статистические.

Если оптимизация параметров технического объекта осуществляется на основе детерминированной математической модели, то используемые критерии оптимальности (выходные параметры объекта) будут также детерминированными. Если же для оптимизации параметров используется вероятностная математическая модель объекта, которая учитывает случайные воздействия внешней среды и (или) случайный разброс параметров, то значения критериев представляют собой статистические оценки выходных параметров объекта, т. е. критерии оказываются статистическими. Значения критериев на каждом шаге поиска при этом представляют собой случайные числа, так как они обусловлены не только изменением управляемых параметров, но и случайными факторами. Поиск решения в этом случае обеспечивается вероятностными итеративными алгоритмами. Эти алгоритмы можно разделить на три группы:

- 1) использующие детерминированный поиск;
- 2) использующие случайный поиск;
- 3) комбинированного типа, использующие детерминированный и случайный поиск.

## 6.6. Формирование целевой функции в многокритериальной задаче оптимизации

Для осуществления поисковой оптимизации необходимо сравнивать между собой результаты каждого шага перемещения в пространстве управляемых параметров и оценивать успешность поиска. Это возможно посредством использования однозначной численной характеристики – скалярной целевой функции. На основе анализа ее изменения алгоритм оптимизации организует целенаправленное движение в пространстве управляемых параметров к точке, в которой достигается экстремум целевой функции.

В однокритериальных задачах критерий оптимальности скалярный. Он и выполняет роль целевой функции. В многокритериальных задачах критерий векторный. Оценка результатов поиска по изменению множества критериев неоднозначная и противоречивая в связи с конфликтностью критериев. Поэтому непосредственное использование их значений в алгоритме оптимизации невозможно. Для решения многокритериальной задачи необходимо построить целевую функцию, которая обеспечивала бы обобщенную оценку качества объекта, отображаемую векторным критерием. В этом случае исходная задача сводится к однокритериальной. Процесс построения скалярной функции качества при многокритериальной оптимизации называется сверткой векторного критерия.

Принципы, положенные в основу формирования целевой функции в многокритериальной задаче оптимизации, определяют стратегию ее решения. Стратегию характеризует способ объединения вектора критериев оптимальности в скалярную целевую функцию. Различают следующие виды стратегий решения многокритериальных задач оптимизации:

- стратегия частного критерия;
- стратегия взвешенной аддитивной компенсации противоречий критериев;
- стратегия мультипликативной компенсации противоречий критериев;
- максиминная стратегия.

При использовании стратегии частного критерия в качестве целевой функции принимают один из критериев оптимальности – выходной параметр технического объекта, характеризующий важнейшее его качество и поэтому наиболее значимый для достижения поставленной цели проектирования. Все остальные критерии оптимальности используются

для назначения ограничений. В этом случае оптимизация параметров технического объекта выполняется по частному критерию.

Стратегия решения многокритериальной задачи оптимизации при использовании аддитивной целевой функции имеет серьезный недостаток, который обусловлен конфликтностью критериев. Он заключается в том, что улучшение целевой функции возможно при уменьшении одного из конфликтных критериев и одновременном увеличении других критериев, т. е. при их ухудшении. Причем, алгоритм оптимизации не реагирует на ухудшение отдельных критериев, так как оно не нарушает процесс поиска минимума целевой функции. Улучшение целевой функции в процессе поиска в этом случае обеспечивается в основном за счет критерия, который имеет наибольшую чувствительность к вариации управляемых параметров. В результате может оказаться, что технические требования на отдельные выходные параметры не будут выполнены. Следовательно, не будут удовлетворяться условия работоспособности технического объекта, и цель проектирования окажется не достигнутой.

В случае использования стратегии мультипликативной компенсации противоречий в аддитивной целевой функции осуществляется компенсация абсолютных значений нормированных критериев. При построении целевой функции можно также применить принцип компенсации относительных значений критериев. Он формулируется следующим образом: суммарный уровень относительного снижения значений одних критериев не должен превышать суммарного уровня относительного увеличения других. Этот принцип приводит к мультипликативной компенсации противоречий критериев. Мультипликативная целевая функция может применяться в тех случаях, когда в техническом задании отсутствуют условия работоспособности и выходные параметры не могут принимать нулевые значения.

Максиминная стратегия решения многокритериальных задач оптимизации нацелена на максимальное удовлетворение технических требований, предъявляемых к объекту проектирования. В ее основе лежит идея равномерности, суть которой заключается в выравнивании всех нормированных критериев оптимальности.

## **6.7. Выбор управляемых параметров**

Управляемыми параметрами при оптимизации являются внутренние параметры технической системы, т.е. параметры ее элементов. Любая техническая система имеет множество внутренних и выход-

ных параметров, поэтому задача оптимизации многопараметрическая и многокритериальная. Решение такой задачи связано с большими затратами вычислительных ресурсов, что заставляет проектировщиков искать и находить целесообразные и обоснованные способы ее упрощения. Это достигается путем уменьшения размерности вектора управляемых параметров.

Часть внутренних параметров объекта регламентируется техническим заданием, и они не подлежат оптимизации. Выбор управляемых параметров из оставшегося подмножества осуществляют на основе анализа чувствительности целевой функции к варьированию значений внутренних параметров объекта. Целесообразно осуществлять оптимизацию лишь тех параметров, которые оказывают значительное влияние на целевую функцию. Значения остальных параметров можно принять по аналогам или по конструктивным соображениям, принимая во внимание прямые ограничения на них, а также нормативные документы и стандарты.

Анализ чувствительности целевой функции заключается в определении вектора чувствительности, элементами которого являются абсолютные коэффициенты влияния или вектора чувствительности с относительными коэффициентами влияния.

Так как для технических объектов аналитического выражения целевой функции обычно получить нельзя, то определение вектора чувствительности осуществляют численным дифференцированием. Такой метод анализа чувствительности называют методом приращений.

Преимущество метода приращений – универсальность и простота алгоритма. Но при сложном рельефе поверхности отклика возникает необходимость определения коэффициентов чувствительности во всей допустимой области управляемых параметров, так как в отдельных ее точках некоторые управляемые параметры могут оказывать незначительное влияние на целевую функцию, а в других точках, наоборот, весьма существенное влияние. Выполнение анализа чувствительности в области управляемых параметров требует больших затрат машинного времени и не гарантирует высокой точности оценки влияния управляемых параметров на целевую функцию, так как количество точек, учитываемых в вычислительном эксперименте, ограничено и выбор их в известной мере случаен.

При использовании максиминной стратегии решения многокритериальной задачи оптимизации затраты времени на анализ чувстви-



тельности еще более возрастают, так как в этом случае целевой функцией на различных шагах поиска может оказаться функция любого из критериев.

Анализ чувствительности можно также выполнить на основе регрессионного метода. Для этого необходимо построить линейную регрессионную модель технического объекта, проведя планирование эксперимента в допустимой области управляемых параметров. Регрессионный метод анализа чувствительности позволяет получить интегральную оценку влияния управляемых параметров на целевую функцию или критерии оптимальности во всей допустимой области их изменения. Этого в большинстве практических случаев бывает вполне достаточно, чтобы решить вопрос выбора управляемых параметров. Вместе с тем следует иметь в виду, что регрессионная модель не отражает истинный характер изменения поверхности отклика в каждой точке пространства и поэтому не может использоваться для выявления локальных экстремумов.

Параметры технического объекта, подлежащие оптимизации, характеризуют его разнообразные свойства и поэтому могут значительно различаться между собой численными значениями, что осложняет выбор величины шагов в пространстве управляемых параметров и снижает эффективность алгоритма поиска экстремума целевой функции. В этой связи управляемые параметры целесообразно нормировать. При нормированных параметрах в процессе поиска происходит их относительное приращение, что упрощает организацию процесса оптимизации.

## **6.8. Методы поиска экстремума целевой функции**

В зависимости от особенностей поверхности отклика и наличия ограничений в процессе поиска экстремума целевой функции применяют различные методы: безусловной и условной, локальной и глобальной оптимизации. Большинство методов оптимизации разработано для поиска безусловного экстремума. Но есть и методы, предназначенные для решения задач с ограничениями (метод проекции вектора градиента, допустимых направлений и др.). Обычно задачи условной оптимизации сводят к задачам безусловной оптимизации с помощью штрафных функций или множителей Лагранжа.

Глобальную оптимизацию может обеспечить только метод сканирования. Однако он очень трудоемок и для многопараметрических задач неприемлем. Обычно осуществляется поиск локальных экстремумов. Поэтому важно уметь правильно оценить расположение области притяжения экстремума и назначить начальную точку поиска.

При поиске экстремума движение в пространстве управляемых параметров осуществляется шагами. От величины шага зависят многие параметры поиска: потери на поиск, точность нахождения точки экстремума, надежность поиска. Разработаны методы выбора оптимального шага поиска.

В зависимости от количества управляемых параметров различают методы одномерного и многомерного поиска. Если аргументом целевой функции является один управляемый параметр, поиск будет одномерным. Одномерный поиск используют также в задачах многопараметрической оптимизации для определения оптимального шага в выбранном напряжении.

Сущность метода оптимизации в первую очередь определяется способом выбора направления движения к экстремуму. В зависимости от порядка используемых при этом производных целевой функции по управляемым параметрам методы безусловной оптимизации делят на методы нулевого, первого и второго порядков (рис. 6.8).

В методах нулевого порядка информация о производных не используется. Поиск экстремума осуществляется только на основе вычисления значений целевой функции. Такие методы называют методами прямого поиска.

Методы первого порядка являются градиентными методами. В градиентных методах используются значения целевой функции и ее первых частных производных по управляемым параметрам.

В методах второго порядка для поиска экстремума используются значения целевой функции, ее первых и вторых частных производных.

Поскольку задачи оптимизации технических систем, как правило, многопараметрические, будем рассматривать только методы многомерного поиска. При изложении методов оптимизации будем предполагать, что управляемые параметры и критерии оптимальности пронормированы и безразмерны.

Метод покоординатного спуска (метод Гаусса–Зейделя) относится к методам нулевого порядка и обеспечивает прямой поиск экстремума без вычисления производных целевой функции, т. е. без использования необходимых и достаточных условий экстремума.

Следовательно, он может быть применен к негладким и разрывным целевым функциям. В методе покоординатного спуска направление движения к экстремуму выбирается поочередно вдоль каждой из координатных осей управляемых параметров. Поэтому метод покоординатного спуска представляет собой последовательное чередование одномерных поисков вдоль всех координатных осей, но в результате осуществляется многомерный поиск.



Рис. 6.8. Методы безусловной оптимизации

Методы случайного поиска экстремума целевой функции подразумевают осуществление перебора совокупностей случайных значений управляемых параметров. Существует много разновидностей случайного поиска. В простейшем из них выбирается случайное на-

правление движения в пространстве управляемых параметров, проверяется его перспективность и при благоприятном результате проверки осуществляется движение в этом направлении. При отрицательном результате выбирается новое случайное направление и процесс повторяется. Проверка перспективности направления основана на вычислениях целевой функции в новой точке и сравнении ее значения со значением в предыдущей точке.

Этот метод оптимизации отличается простым алгоритмом и относится к группе методов прямого многомерного поиска. При определенных усложнениях алгоритма случайного поиска можно определить статистический градиент целевой функции, ввести элементы самообучения и адаптации метода к условиям поиска и другие усовершенствования, позволяющие повысить эффективность алгоритма.

Метод градиента основан на градиенте целевой функции – векторная величина, компонентами которой являются частные производные целевой функции по управляемым параметрам. Направление вектора градиента в каждой точке поверхности отклика совпадает с направлением наиболее быстрого возрастания целевой функции, т. е. с наиболее крутым восхождением к наивысшей точке этой поверхности в некоторой локальной области управляемых параметров. Градиентное направление является локально наилучшим направлением поиска при максимизации целевой функции, а антиградиентное – при ее минимизации. Это свойство вектора и используется в методе градиента.

Метод наискорейшего спуска, так же как и предыдущий, относится к градиентным, т. е. к методам первого порядка. Существует несколько вариантов метода наискорейшего спуска.

Первый из них отличается от метода градиента тем, что величина шага поиска не задается, как параметр алгоритма, а определяется путем одномерной минимизации целевой функции вдоль градиентного направления. В результате вычисление градиента осуществляется реже, чем в предыдущем методе, и эффективность поиска повышается, особенно вдали от экстремальной точки. Этот вариант метода наискорейшего спуска приводит к большему числу шагов, чем метод градиента, но требует меньшего объема вычислений, так как градиент определяется реже.

Градиентные методы обеспечивают локально наилучшее направление движения к экстремальной точке. Однако антиградиентное направление, принятое в исходной точке, приводит непосредственно в точку минимума лишь в том случае, когда линии равных уровней

целевой функции представляют собой окружности. При более сложном рельефе поверхности целевой функции траектория поиска становится сложной многошаговой. Для того чтобы построить более общую стратегию поиска, необходимо привлечь информацию о вторых производных целевой функции по управляемым параметрам.

Метод Ньютона относится к методам второго порядка. В процессе поиска экстремума этим методом используется информация о целевой функции и ее первых и вторых частных производных по управляемым параметрам. Это обеспечивает более высокую скорость сходимости метода Ньютона по сравнению с методами нулевого и первого порядков. Если целевая функция квадратичная и матрица Гессе положительно определенная, то метод Ньютона позволяет найти минимум целевой функции за один шаг, независимо от выбора начальной точки. В общем случае произвольной целевой функции сходимость повышается, если начальную точку удастся выбрать в малой окрестности экстремальной точки. Поэтому метод Ньютона целесообразно применять на завершающих шагах поиска, после попадания в малую окрестность экстремума посредством других методов.

Метод Марквардта представляет собой комбинацию методов наискорейшего спуска и Ньютона, в которой удачно сочетаются положительные свойства обоих методов. Согласно вышеизложенному, вдали от экстремальной точки наиболее эффективное направление движения определяется градиентом, а в окрестности точки – методом Ньютона. В этом и состоит идея метода Марквардта. Аппроксимация градиента целевой функции. При проектировании технических объектов чаще всего отсутствует аналитическое выражение целевой функции. В этом случае градиент целевой функции определяют посредством конечно-разностной аппроксимации.

Целевые функции, используемые при проектировании технических объектов, характеризуются сложным рельефом поверхностей отклика. На поверхности рельефа имеют место овраги и гребни, создающие значительные сложности при поиске экстремума. Сложность рельефа обусловлена многомерностью целевой функции, наличием конфликтных критериев, учетом функциональных ограничений, введением функции штрафа при сведении задач условной оптимизации к задачам поиска безусловного экстремума и другими факторами.

Такие задачи поисковой оптимизации называются плохо обусловленными. Об обусловленности их судят по числу обусловленно-

сти матрицы Гессе (аналогично тому, как обусловленность системы уравнений математической модели объекта оценивается числом обусловленности матрицы Якоби).

Рассмотренные методы поисковой оптимизации (за исключением методов Ньютона и Марквардта) для решения таких задач обычно оказываются малоэффективными. Что касается методов второго порядка, то их применение обычно ограничивается лишь кругом задач с аналитическими целевыми функциями, позволяющими непосредственно получить выражения для определения матрицы Гессе, что не характерно для технических объектов.

Вместе с тем следует отметить, что рассмотренным методам уделено большое внимание потому, что они составляют основу более эффективных алгоритмов, приспособленных к особенностям решаемых задач оптимизации в технике.

## Литература

1. Трудоношин, В. А. САПР: системы автоматизированного проектирования : в 4 кн. / В. А. Трудоношин, Н. В. Пивоварова. – Минск : Высш. шк., 1988. – Кн. 4. Математические модели технических объектов. – 159 с.
2. Тарасик, В. П. Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск : ДизайнПРО, 2004. – 640 с.
3. Математическое моделирование гидropневмосистем : учеб.-метод. пособие / Д. Л. Стасенко, Д. В. Лаевский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2017. – 150 с.
4. Попов, Д. Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем : учебник / Д. Н. Попов. – М. : Машиностроение, 1976. – 426 с.
5. Бусленко, Н. П. Моделирование сложных систем / Н. П. Бусленко. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
6. Горнштейн, А. М. Практика решения инженерных задач на ЭВМ / А. М. Горнштейн. – М. : Радио и связь, 1984. – 133 с.

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Стасенко Дмитрий Леонидович

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ**

**Учебно-методическое пособие  
для магистрантов специальности 7-06-0714-02  
«Инновационные технологии в машиностроении»  
дневной и заочной форм обучения**

Редактор  
Компьютерная верстка

*О. С. Ковалёва*  
*Н. Б. Козловская*

Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя  
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.  
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель