Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 9

МАТЕМАТИКА

С. Б. СТЕЧКИН

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 IV 1948)

1. Пусть $t_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка n, а $t_n^{(r)}(x)$ — его производная порядка r. С. Н. Бернштейн (см., например, [1]) доказал, что

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leqslant n^r \max_x |t_n(x)| \quad (r = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

и что это неравенство обращается в равенство, только если

$$t_n(x) = a\cos nx + b\sin nx.$$

Зададим натуральное число r и для любого h обозначим через $\Delta_h^r t_n(x)$ конечную разность k-го порядка от полинома $t_n(x)$ с шагом h:

$$\Delta_h^r t_n(x) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} t_n(x+ih). \tag{2}$$

Здесь будет доказано следующее обобщение неравенства (1):

Теорема. *Пусть*

$$0 < h < \frac{2\pi}{n}.$$

Тогда для любого натурального r

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leqslant \left(\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\right)^r \max_x |\Delta_h^r t_n(x)|, \tag{3}$$

и неравенство обращается в равенство в том и только том случае, если

$$t_n(x) = a\cos nx + b\sin nx + c. \tag{4}$$

2. Для доказательства этой теоремы нам понадобится одна лемма чебышевского характера.

Лемма. *Пусть* $\max\limits_x |t_n(x)| = L > 0$ *и* $t_n(x_0) = L$. *Тогда*

$$t_n(x_0+\eta) \geqslant L\cos n\eta \quad \left(|\eta| \leqslant \frac{\pi}{n}\right). \tag{5}$$

Эта лемма может считаться известной. Она вытекает из результатов С. Н. Бернштейна [2].

Вот простое доказательство этой леммы. Пусть, например, для некоторого η, удовлетворяющего условиям $0<\eta<\pi/n$, имеет место обратное неравенство

$$t_n(x_0+\eta)<L\cos n\eta. \tag{6}$$

Рассмотрим тригонометрический полином

$$\psi_n(\eta)=t_n(x_0+\eta)-L\cos n\eta.$$

Он имеет двойной корень при $\eta=0$ и, кроме этих двух корней, еще $2n-1$ корней, по одному в каждом из отрезков $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$ $(k=0, 1, \ldots, 2n-2)$ (двойные корни считаются за 2). Таким образом $\psi_n(\eta)$, являясь тригонометрическим полиномом порядка не выше n, имеет на периоде $2n+1$ корень, откуда $\psi_n(\eta)\equiv 0$, что противоречит предположению (6).

Аналогично устанавливается невозможность неравенства (6) для $-\pi/n<\eta<0$, и лемма доказана.

То же рассуждение показывает, что если для некоторого η $(0<|\eta|\leqslant\pi/n)$ неравенство (5) обращается в равенство, то $t_n(x)=a\cos nx+b\sin nx$, но это нам не понадобится.

3. Приступаем к доказательству теоремы. Начнем с рассмотрения случая $r=1$. Положим $\max\limits_x|t'_n(x)|=L$, и пусть, ради определенности, $t'_n(x_0)=L$. По доказанной лемме

$$t'_n(x_0+\eta)\geqslant L\cos n\eta \quad \left(|\eta|\leqslant\frac{\pi}{n}\right).$$

Интегрируя это неравенство в пределах от $-h/2$ до $+h/2$, получим

$$t_n\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-t_n\left(x_0-\frac{h}{2}\right)\geqslant\frac{2L}{n}\sin\frac{nh}{2}. \tag{7}$$

Здесь имеет место знак равенства, только если для всех η, $|\eta|\leqslant h/2$,

$$t'_n(x_0+\eta)=L\cos n\eta,$$

т. е. если $t_n(x)$ имеет вид (4).

Из неравенства (7) вытекает, что

$$\max_x|\Delta_h t'_n(x)|\geqslant\frac{2L}{n}\sin\frac{nh}{2}$$

или

$$\max_x|t'_n(x)|\leqslant\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\max_x|\Delta_h t_n(x)|, \tag{8}$$

а это совпадает с (3) для $r=1$.

Если (8) обращается в равенство, то обращается в равенство и (7), т. е. для этого необходимо, чтобы $t_n(x)$ имел вид (4). Прямой подсчет показывает, что этого и достаточно.

4. Из неравенства (8) с помощью индукции без труда вытекает теорема для произвольного r.

Пусть доказано, что

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leqslant \left(\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\right)^r \max_x |\Delta_h^r t_n(x)|$$

и что это неравенство обращается в равенство только для полиномов вида (4). Применяя это неравенство к полиному $\Delta_h t_n(x)$, находим, что

$$\max_x |\Delta_h t_n^{(r)}(x)| \leqslant \left(\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\right)^r \max_x |\Delta_h^{r+1} t_n(x)|$$

с равенством только в случае (4). Далее, применяя (8) к полиному $t_n^{(r)}(x)$, получаем:

$$\max_x |t_n^{(r+1)}(x)| \leqslant \frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}} \max_x |\Delta_h t_n^{(r)}(x)|,$$

с равенством только в случае (4), и два последних неравенства дают (3) для $r+1$, а замечания о возможности равенства показывают, что (3) обращается в равенство для полиномов вида (4) и только для них. Теорема доказана.

В доказательстве неявно предполагалось, что $t_n(x)$ — вещественный полином. Нетрудно показать, что неравенство (3) остается справедливым и для полиномов, принимающих комплексные значения.

Было бы интересно получить аналог неравенства (3) для $h > 2\pi/n$, $h \neq 2k\pi/p$ (k — целое, $p = 1, 2, \ldots, n$).

5. Отметим ряд следствий из доказанной теоремы.

A. Частный случай $h = \pi/n$.

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^r \max_x |\Delta_{\pi/n}^r t_n(x)|. \tag{9}$$

Это неравенство получено одновременно с нами другим путем С. М. Никольским [3].

B. Неравенство С. Н. Бернштейна.

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leqslant n^r \max_x |t_n(x)|.$$

В самом деле, очевидно, что

$$\max_x |\Delta_h^r t_n(x)| \leqslant 2^r \max_x |t_n(x)|, \tag{10}$$

и объединение этого неравенства с (9) доставляет неравенство С. Н. Бернштейна. Нетрудно также проверить, что (8) и (10) одновременно обращаются в равенство, только если

$$t_n(x) = a\cos nx + b\sin nx.$$

C. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для обыкновенных многочленов. Пусть $P_n(u)$ есть обыкновенный многочлен степени n. Положим

$$\omega(\delta, P_n) = \max_{\substack{-1 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant u_2 - u_1 \leqslant \delta}} |P_n(u_2) - P_n(u_1)|.$$

Тогда

$$|P_n'(u)| \leqslant \frac{n}{2\sqrt{1-u^2}}\,\omega\left(2\sin\frac{\pi}{2n},\,P_n\right) \quad (|u|<1). \tag{11}$$

Действительно, если $u=\cos x$, то согласно (9),

$$|P_n'(u)\sin x| \leqslant \frac{n}{2}\max_x\left|P_n\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)-P_n(\cos x)\right|. \tag{12}$$

Но $\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\right| \leqslant 2\sin\frac{\pi}{2n}$. Отсюда

$$\max_x\left|P_n\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)-P_n(\cos x)\right| \leqslant \omega\left(2\sin\frac{\pi}{2n},\,P_n\right); \tag{13}$$

(12) и (13) доставляют (11).

D. Обобщение неравенства А. А. Маркова.

$$|P_n'(u)| \leqslant \frac{n^2}{2}\,\omega\left(2\sin\frac{\pi}{2n},P_n\right) \quad (|u|\leqslant 1).$$

Доказательство не отличается от обычного ([1], стр. 168), если воспользоваться неравенством (11).

E. Пусть $0<h<2\pi/n$. Тогда

$$\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^r \leqslant \frac{\max\limits_x|\Delta_h^r t_n(x)|}{h^r\max\limits_x|t_n^{(r)}(x)|}<1.$$

Приложения доказанной теоремы и следствий из нее к некоторым вопросам теории приближения функций будут даны в другой работе.

Я выражаю глубокую благодарность акад. С. Н. Бернштейну за внимание к моей работе и ценные замечания.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
27 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М.—Л., 1937. [2] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 9, 1151 (1931). [3] С. М. Никольский, ДАН, **60**, № 9 (1948).