Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 9

МАТЕМАТИКА

С. НИКОЛЬСКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО НЕРАВЕНСТВА С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 IV 1948)

Положим для функции $f(x)$ (вообще комплексной), заданной на действительной оси, для всякого $h>0$

$$\Delta_h(f)=\Delta_h(f,x)=\Delta_h^{(1)}(f,x)=f(x+h)-f(x),$$

$$\Delta_h^{(k)}(f)=\Delta_h^{(k)}(f,x)=\Delta_h\{\Delta_h^{(k-1)}(f),x\}\quad(k=1,2,\ldots),$$

$$\omega_*^{(k)}(f,h)=\sup_x|\Delta_h^{(k)}(f,x)|,\qquad \omega^{(k)}(f,\delta)=\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\omega^{(k)}(f,h).$$

В этой заметке мы доказываем теорему:

Теорема. *Если $f(z)$ есть целая функция экспоненциального типа степени ρ, для которой при заданных k и h ($k=1,2,\ldots$; $0<h\leqslant\pi/\rho$) величина $\omega_*^{(k)}(f,h)$ конечна, то производная $f^{(k)}(x)$ порядка k ограничена на действительной оси и удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f^{(k)}(x)|\leqslant\frac{\rho^k}{2^k}\omega_*^{(k)}\left(f,\frac{\pi}{\rho}\right).\tag{1}$$

В нем можно ω_* заменить на ω, и в обоих случаях оно обращается в равенство при $f(z)=\sin\rho z$.

Эта теорема представляет собой обобщение известного неравенства С. Н. Бернштейна, так как если функция $f(z)$ экспоненциального типа степени ρ ограничена на вещественной оси, то

$$|\Delta_h^{(k)}(f,x)|=\left|\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i f(x+ih)\right|\leqslant 2^k\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|.$$

Я хочу еще отметить, что получению мной этой теоремы предшествовал следующий результат, полученный С. Б. Стечкиным.

Существует константа C, не зависящая от n, такая, что для всех тригонометрических полиномов $T_n(x)$ порядка n имеет место неравенство

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|T_n'(x)|\leqslant C_n\sup_x\sup_{|h|\leqslant 1/n}|T_n(x+h)-T_n(x)|.\tag{2}$$

Из сформулированной теоремы, в частности, следует, что если в (2) заменить $1/n$ на π/n, то наименьшее $C=1/2$.

Доказательство. Докажем сначала теорему в случаях $\rho=k=1$ и $h=\pi$.

Итак, пусть $f(z)$ есть целая функция степени 1, для которой

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x+\pi)-f(x)| = \omega(f,\pi)=\omega<\infty. \tag{3}$$

Полагая $x=k\pi+\alpha$, $0\leqslant\alpha<\pi$, получим

$$|f(x)|=\left|f(\alpha)+\sum_{i=1}^{k}[f(i\pi+\alpha)-f((i-1)\pi+\alpha)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant C_1(1+|x|)<C_2|i+x|, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — константы, откуда, по теореме С. Н. Бернштейна ([1]),

$$|f(x+iy)|\leqslant C_3|x+iy|e^{|y|}. \tag{5}$$

Зададим произвольное действительное число x и пусть C_n обозначает окружность в плоскости комплексной переменной ζ радиуса $R=R(x)=\pi n>|x|$ с центром в точке x.

Полагая

$$\eta_x=f\left(x+\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\right)-f\left(x-\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\right),$$

$$\sigma_k=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2},\quad |\sigma_k|\leqslant\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2},\quad \operatorname{sign}\sigma_k=(-1)^{k+1},$$

получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(x+\zeta)\,d\zeta}{\zeta^2\cos\zeta}=f'(x)-\sum_{k=-(n-1)}^{n}\frac{(-1)^{k+1}f\left(x+\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}=$$

$$=f'(x)-\sigma_1\eta_1-\sum_{k=2}^{n}\sigma_k(\eta_k-\eta_{k+1})+\eta_n\sigma_{n+1}. \tag{6}$$

Если воспользоваться неравенством $|\cos\zeta|>Ke^{|\eta|}$ $(\zeta=y+i\eta)$, где K — положительная константа, имеющим место на C_n, то, в силу (5), левая часть (6) ограничена равномерно относительно x и n $(n\pi>|x|)$. Это же имеет место для суммы последних трех членов (6), так как

$$|\eta_1|\leqslant\omega,\quad |\eta_k-\eta_{k+1}|\leqslant 2\omega,\quad |\eta_k|\leqslant Cn.$$

Таким образом, $|f'(x)|\leqslant C$ для вещественных x, откуда, на основании неравенства Бернштейна, $|f^{(n)}(x)|\leqslant C$ $(n=1, 2, \ldots)$. В таком случае оценка ряда Тэйлора $f(x+iy)$ по степеням iy даст более точное, чем (5), неравенство

$$|f(x+iy)|\leqslant C_1(1+|x|)+Ce^{|y|},$$

благодаря которому легко заключаем, что левая часть (6) при фиксированном x фактически стремится к нулю при $R\to\infty$ так же, как последний член правой части (6).

Следовательно, условие (3) влечет

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} f\left(x + \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}. \tag{7}$$

Это равенство в предположении, что целая функция первой степени ограничена для $-\infty < x < \infty$, давно уже известно в литературе (см., например, ([2])). Мы только несколько расширили область его применимости.

Из (7) с помощью преобразования Абеля следует

$$f'(x) = \sigma_1 \eta_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (\eta_k - \eta_{k+1}) \sigma_k .$$

В частности, для $f(x) = \sin x$ при $x = 0$

$$\eta_1 = 2 = 2 \operatorname{sign} \sigma_1, \quad \eta_k - \eta_{k+1} = 4 \operatorname{sign} \sigma_k,$$

и, следовательно,

$$1 = 2\{|\sigma_1| + 2 \sum_{k=2}^{\infty} |\sigma_k|\},$$

откуда

$$|f'(x)| \leqslant \{|\sigma_1| + 2 \sum_{k=2}^{\infty} |\sigma_k|\} \omega = \frac{\omega}{2},$$

и теорема для $\rho = k = 1$ и $h = \pi$ доказана.

Случай произвольного ρ и $k = 1$ сводится к доказанному, так как если $f(z)$ степени 1, то $f(\rho z)$ степени ρ, и наоборот. На основании тех же соображений с помощью уже доказанного заключаем, что если f — целая функция первой степени, для которой $|f(x+h) - f(x)|$ ограничено для $-\infty < x < \infty$ и при $|h| < \pi$, то это влечет ограниченность $|f(x+\pi) - f(x)|$.

Допустим теперь, что теорема верна для $k \leqslant m-1$. Из ограниченности $\Delta_h^{(m)}(f, x) = \Delta_h(\Delta_h^{(m-1)}(f), x)$ и верности теоремы при $m = 1$ следует ограниченность

$$\frac{d}{dx} \Delta_h^{(m-1)}(f, x) = \Delta_h^{(m-1)}(f', x),$$

а также $\Delta_\pi^{(m-1)}(f', x)$ и $\Delta_\pi^{(m)}(f, x)$. Поэтому

$$|\Delta_\pi^{(m-1)}(f', x)| \leqslant \frac{1}{2} \omega_*^{(m)}(f, \pi).$$

С другой стороны, из ограниченности левой части этого неравенства следует ограниченность $f^{(m)}(x)$ и неравенство

$$\left|f^{(m)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^{m-1}} \sup_x \left|\Delta_\pi^{(m-1)}(f', x)\right| \leqslant \frac{1}{2^m} \omega_*^{(m)}(f, \pi).$$

Примечание. Доказанная теорема может быть без труда обобщена на случай многих переменных и на другие метрики. Например, имеет место следующее утверждение.

Пусть E — пространство типа (B) функций $f=f(x, y)$, заданных на вещественной плоскости $-\infty<x, y<\infty$, такое, что: 1) вместе с $f(x, y)$ к E принадлежит $f(x+h, y+k)$ и $\|f(x, y)\|=\|f(x+h, y+k)\|$; 2) из $f_n \in E$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\|f_n-f\| \to 0$ и $\sup\limits_{x, y} |f_n(x, y)-\varphi(x, y)| \to 0$ при $n \to \infty$ следует $f(x, y) \equiv \varphi(x, y)$.

Пусть далее функция $f(u, v)$ комплексных переменных u и v есть целая степени r по u и целая степени s по v такая, что: 1) $f(x, y) \in E, -\infty<x, y<\infty$; 2) разность $\Delta_{h, g}^{(k, l)}(f, x, y)=\Delta_{h, g}^{(k, l)}(f)$ порядка k по x с шагом $|h| \leqslant \pi / r$ и порядка l по y с шагом $|g| \leqslant \pi / s$ ограничена для $-\infty<x, y<\infty$.

Тогда $\partial^{k+l} f / \partial x^k \partial y^l \in E$ и

$$\left\|\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}\right\| \leqslant \frac{r^k s^l}{2^{k+l}}\left\|\Delta_{\frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{s}}^{(k, l)}(f)\right\|.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
21 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, **52**, 565 (1946). [2] С. Лозинский, ДАН, **55**, 9 (1947).