Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 9

МАТЕМАТИКА

А. И. МАЛЬЦЕВ

О ВКЛЮЧЕНИИ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР В АЛГЕБРЫ С ДЕЛЕНИЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 IV 1948)

Пусть заданы некоторое поле P и произвольная некоммутативная группа $\mathfrak{G}$. Групповую алгебру $\mathfrak{G}$ над P обозначим через $\mathfrak{G}_P$. Возникает вопрос, при каких условиях алгебра $\mathfrak{G}_P$ может быть расширена до алгебры с делением. Если поле P и группа $\mathfrak{G}$ упорядоченные, то групповая алгебра $\mathfrak{G}_P$ легко упорядочивается, и речь идет о возможности вложения $\mathfrak{G}_P$ в упорядоченное тело. В статье Муфанг ([1]) показано, что $\mathfrak{G}_P$ можно вложить в упорядоченное тело, если $\mathfrak{G}$ метабелева группа с образующими a, b, c и соотношениями $ba=abc$, $ca=ac$, $bc=cb$. Там же отмечено, что вопрос о вложимости $\mathfrak{G}_P$ в тело для случая свободной группы $\mathfrak{G}$ все еще остается открытым.

Цель настоящей заметки — доказать следующую теорему:

Теорема. *Пусть P — произвольное поле, $\mathfrak{G}$ — упорядоченная группа. Групповая алгебра $\mathfrak{G}_P$ может быть расширена до некоторой алгебры $L(\mathfrak{G})$ с делением. Если поле P упорядоченное, то тело $L(\mathfrak{G})$ упорядочиваемо, притом с сохранением порядка элементов P и $\mathfrak{G}$.*

Отсюда вытекает, что необходимым и достаточным условием для вложимости групповой алгебры $\mathfrak{G}_P$ в упорядоченное тело является упорядочиваемость группы $\mathfrak{G}$ и поля P. Известно, что свободная группа упорядочиваема*; следовательно, групповое кольцо свободной группы вложимо в алгебру с делением. Это дает положительное решение упомянутой проблемы Муфанг. Упорядочиваемы также нильпотентные группы без кручения, локально свободные группы и некоторые другие. Групповые алгебры всех этих групп вложимы в алгебры с делением. В частности, простейшей нильпотентной группой без кручения является и группа, рассмотренная Муфанг.

Перейдем к доказательству теоремы. Нам дана упорядоченная группа $\mathfrak{G}$ и произвольное, быть может, неупорядоченное поле P. Формальную сумму $\Sigma\alpha_i g_i$ ($\alpha_i \in P$, $g_i \in \mathfrak{G}$, $g_i \neq g_j$ для $i \neq j$) условимся называть l-рядом, если совокупность элементов $\mathfrak{G}$, имеющих в этой сумме ненулевые коэффициенты, вполне упорядочена по убыванию. Складывая по обычным правилам l-ряды или умножая их на элементы поля P, мы получим, очевидно, снова l-ряды. Чтобы две формальные суммы перемножить, нужно каждый член первой умножить на каждый член второй по формуле $\alpha g \cdot \beta h = \alpha\beta \cdot gh$, полученные произведения записать в виде формальной суммы и привести подобные члены. Если подобных членов бесконечное множество, то произведение не определено.

* См., например, ([2]) и цитированную там литературу.

Покажем, что *произведение любых двух l-рядов определено и является l-рядом.*

Достаточно обнаружить, что если $g_1 > \ldots > g_\lambda > \ldots$, $h_1 > \ldots > h_\mu > \ldots$ две убывающие трансфинитные последовательности элементов $\mathfrak{G}$, то каждая цепочка вида $g_{i_1} h_{j_1} \leqslant g_{i_2} h_{j_2} \leqslant \ldots$ содержит только конечное число различных произведений. В противном случае выберем среди $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots$ наибольший элемент g_{i_α}; из элементов следующих за g_{i_α}, выберем наибольший g_{i_β} и т. д. Из неравенств $g_{i_\alpha} h_{j_\alpha} \leqq g_{i_\beta} h_{j_\beta} \leqq \ldots$ и $g_{i_\alpha} > g_{i_\beta} > \ldots$ следует $h_{j_\alpha} < h_{j_\beta} < \ldots$, что противоречит условию, так как $h_{j_\alpha}, h_{j_\beta}, \ldots$ принадлежат множеству, вполне упорядоченному по убыванию.

Итак, *совокупность l-рядов группы $\mathfrak{G}$ образует алгебру над полем P, содержащую групповое кольцо $\mathfrak{G}_P$ в качестве своей подалгебры.*

Эту алгебру условимся обозначать $L(\mathfrak{G})$. Если поле P упорядоченное, то алгебру $L(\mathfrak{G})$ также можно упорядочить, называя положительными l-ряд с положительным коэффициентом при старшем члене. Единичный элемент группы $\mathfrak{G}$ является единицей алгебры $L(\mathfrak{G})$.

Покажем, что $L(\mathfrak{G})$ — *алгебра с делением.*

Ясно, что все дело сводится к построению обратного элемента для l-ряда вида

$$1 + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_\lambda g_\lambda + \ldots = 1 + u,$$

где $1 > g_1 > g_2 > \ldots > g_\lambda > \ldots$ Если будет обнаружено, что ряд $1 - u + u^2 - u^3 + \ldots$ имеет смысл, т. е. что по возведении u в требуемые степени и подстановки результатов в $1 - u + u^2 - u^3 + \ldots$ получатся лишь конечные совокупности подобных членов, после приведения которых возникнет l-ряд, то формальное умножение $1 + u$ на $1 - u + u^2 - u^3 + \ldots$ будет законно и даст 1. Поэтому речь идет только о доказательстве следующей леммы:

Если $1 > g_1 > g_2 > \ldots > g_\lambda > \ldots$ трансфинитная последовательность элементов группы $\mathfrak{G}$, то каждая неубывающая последовательность произведений этих элементов

$$g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_k} \leqq g_{j_1} g_{j_2} \ldots g_{j_l} \leqq \ldots \qquad (1)$$

содержит лишь конечное число различных произведений (*различающихся сомножителями или порядком их*).

Пусть $g \in \mathfrak{G}$, $g < 1$. Обозначим через $I(g)$ совокупность элементов $x \in \mathfrak{G}$, для которых $g < x^n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а через $E(g)$ совокупность элементов $x \in \mathfrak{G}$ таких, что при некотором m, n будет $g^n < y$, где $y = \min\{x, x^{-1}\}$. $E(g)$ и $I(g)$ — подгруппы группы $\mathfrak{G}$, причем $I(g)$ нормальный делитель $E(g)$; фактор-группа $E(g)/I(g)$ архимедовски упорядоченная и коммутативная (см. ([3])). Из неравенств $1 > g_1 > g_2 > \ldots$ вытекает, что $1 = E(1) \subseteq E(g_1) \subseteq E(g_2) \subseteq \ldots$ Положим $E_\alpha = \bigcup_{\lambda < \alpha} E(g_\lambda)$. Если все сомножители в (1) принадлежат E_1, то лемма справедлива, так как ее условия не выполняются. Далее воспользуемся трансфинитной индукцией. Пусть α — некоторое трансфинитное число и пусть лемма верна, если все сомножители (1) входят в некоторое E_λ, где $\lambda < \alpha$. Предположим теперь, что нам дана последовательность (1), все сомножители которой содержатся в E_α и которая противоречит лемме. Назовем классом сомножителя g_i наименьшее трансфинитное число β, для которого $g_i \in E(g_\beta)$. Мы можем i-е произведение записать в виде $u_{i0} a_{i1} u_{i1} a_{i2} \ldots a_{is_i} u_{is_i}$, где

$a_{i1}, \ldots, a_{is_i}$ — сомножители высшего класса, а $u_{i0}, \ldots, u_{is_i}$ — произведения промежуточных сомножителей. Из определения групп $E(g)$ вытекает, что класс каждого произведения в точности совпадает с классом сомножителей. Поскольку произведения (1) меньше единицы, то с возрастанием класса они должны убывать. Следовательно, произведения (1), начиная с некоторого места, имеют один и тот же класс β. Если α предельное или $\beta < \alpha - 1$, то лемма по предположению верна. Поэтому будем считать, что $\beta = \alpha - 1$. Из $g_i \in I(g_\beta)$ следует $g_i > g_\beta$, и класс g_i меньше β. Таким образом, ни один из отмеченных множителей в $I(g_\beta)$ не содержится, в то время как все неотмеченные множители лежат в $I(g_\beta)$. Пусть наибольший среди отмеченных множителей всех произведений равен g. Тогда величина i-го произведения будет не больше g^{s_i}. Но при достаточно большом s элемент g^s будет меньше любого элемента $E(g_\beta)$, в частности, меньше любого заданного произведения (1). Отсюда следует, что число отмеченных множителей в каждом произведении не превосходит некоторой границы s.

Рассмотрим произведения $u_{10}, u_{20}, u_{30}, \ldots$ Их множители содержатся в E_β, и потому к ним лемма применима; в частности, значения этих произведений образуют множество, вполне упорядоченное по убыванию. Следовательно, мы можем найти бесконечную подпоследовательность индексов $m_1 < m_2 < \ldots$ такую, чтобы $u_{m_1 0} \geqq u_{m_2 0} \geqq \ldots$ и чтобы последовательность

$$a_{m_t 1}\, u_{m_t 1}\, a_{m_t 2} \ldots a_{m_t s}\, u_{m_t s} \qquad (t = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

содержала бесконечное число различных произведений. При этих условиях последовательность (2) будет противоречить лемме. Из последовательности (2) тем же приемом можно выделить подпоследовательность

$$u_{m_{t_i} 1}\, a_{m_{t_i} 2} \ldots a_{m_{t_i} s}\ \ u_{m_{t_i} s} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

снова противоречащую лемме. Продолжая этот процесс, мы не более чем через $2s$ шагов придем к некоторой подпоследовательности произведений $u_{1s}, u_{2s}, \ldots$, противоречащей лемме. Но это невозможно, так как сомножители из $u_{1s}, u_{2s}, \ldots$ содержатся в E_β.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
22 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Moufang, J. f. Math., **176**, 203 (1937). [2] Е. П. Шимбирева, Матем. сб., **20**. № 1 (1947). [3] F. Levi, Proc. Ind. Acad. Sci., **16**, 256 (1942).