Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 9

МАТЕМАТИКА

В. А. ДИТКИН

К ВОПРОСУ О ФОРМАЛЬНОМ ПЕРЕМНОЖЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 29 IV 1948)

В этой заметке приводится теорема, которая для частного случая ($r=0$) была доказана в ([1]).

Пусть последовательность α_n удовлетворяет для всех целых m и n условиям:

$$\alpha_{m+n} \leqslant Q\alpha_m\alpha_n, \qquad 1 \leqslant \alpha_n \leqslant C|n|^r, \tag{1}$$

где Q и C — постоянные числа и r — целое неотрицательное.

Рассмотрим два тригонометрических ряда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{2}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-inx}, \tag{3}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \alpha_n < \infty \tag{4}$$

и

$$|s_n| \leqslant \alpha_n. \tag{5}$$

При этих условиях будут абсолютно сходиться ряды

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k s_{k+n} = \sigma_n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{6}$$

$$\frac{s_0 \xi^{r+2}}{(r+2)!} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{s_n e^{-in\xi}}{(-in)^{r+2}} = s(\xi), \tag{7}$$

$$\frac{\sigma_0 \xi^{r+2}}{(r+2)!} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_n e^{-in\xi}}{(-in)^{r+2}} = \sigma(\xi). \tag{8}$$

Теорема. *Если $\sigma(\xi)$ в интервале (a, b) есть полином степени не выше $r+1$, то функция $s(\xi)$ равна полиному степени не выше $r+1$ в каждом из интервалов, смежных к множеству $\Delta \cdot F$, где $\Delta = [a, b]$ и F — множество всех нулей функции $f(x)$.*

Не нарушая общности, можно считать $0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$.

Случай $b - a > 2\pi$ означает, что все $\sigma_n = 0$.

Множество всех тригонометрических рядов (2), (4) образует нормированное кольцо $W_{<\alpha_n>}$ (см. ([2]) и ([3]) стр. 13). Этим обстоятельством воспользуемся при доказательстве теоремы. При этом важную роль играет

Лемма. *Пусть J — идеал в кольце $W_{<\alpha_n>}$, $f(x)$ принадлежит к J и $f(\xi) \neq 0$. Тогда всякая функция кольца, равная нулю всюду, кроме достаточно малой окрестности точки ξ, принадлежит к идеалу J (вещественные числа рассматриваются по модулю 2π).*

Доказательство. Пусть $\lambda(x;\ \varepsilon) \in W_{<\alpha_n>}$ равна единице при $0 \leqslant |x| \leqslant \varepsilon$ и нулю при $2\varepsilon \leqslant |x| \leqslant \pi$. Выбираем ε так, чтобы для всех x $2|\gamma(x)| \leqslant |f(\xi)|$, где $\gamma(x) = \lambda(x - \xi;\ \varepsilon)[f(x) - f(\xi)]$. Тогда (см. ([2])) $\gamma(x) + f(\xi)]^{-1} \in W_{<\alpha_n>}$. Если $\omega(x) \in W_{<\alpha_n>}$ и $\omega(x) = 0$ при $\varepsilon \leqslant |x - \xi| \leqslant \pi$, то $\omega(x) = \omega(x) f(x) [\gamma(x) + f(\xi)]^{-1} \in J$, ч. т. д.

Определим в $W_{<\alpha_n>}$ линейный функционал $F(f)$ условием

$$F(e^{ikx}) = s_k. \tag{9}$$

Тогда (см. (6))

$$F(f(x)\, e^{inx}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k F(e^{i(k+n)x}) = \sigma_n. \tag{10}$$

Пусть $u_h \sigma(\xi) = \sigma(\xi + h)$. Нетрудно видеть:

$$(u_h - u_{-h})^r \sigma(\xi) = \sigma(\xi + rh) - \binom{r}{1} \sigma(\xi + (r-2)h) + \ldots + (-1)^r \sigma(\xi - rh). \tag{11}$$

С другой стороны, простой подсчет показывает

$$\sigma(\xi;\ h) = \left(\frac{u_h - u_{-h}}{2h}\right)^{r+2} \sigma(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^{r+2} \sigma_k e^{-ik\xi}, \tag{12}$$

откуда

$$\sigma_n = F(f e^{inx}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\xi;\ h)\, e^{in\xi}\, d\xi.$$

Пусть $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx} \in W_{<\alpha_n>}$, тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_n d_n = F(f(x)\, g(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\xi)\, \sigma(\xi;\ h)\, d\xi. \tag{13}$$

Если $g(x) = 0$ в интервалах $(0,\ a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon,\ 2\pi)$, то из условия теоремы и (12), (11) следует, для всех достаточно малых h,

$$g(\xi)\, \sigma(\xi;\ h) = 0, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi.$$

Следовательно (см. (13)),

$$F(f(x)\, g(x)) = 0.$$

Но совокупность всех функций вида fg образует в кольце алгебраический идеал. Замыкая его, получим идеал J, на котором функционал F равен нулю. Функция

$$\omega(x;\, h)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\, nh}{nh}\right)^{r+2} e^{inx} \tag{14}$$

принадлежит к кольцу и, кроме того, $\omega(x;\, h)=0$ для $(r+2)h \leqslant \leqslant |x| < \pi$ [4].

Если ξ принадлежит смежному интервалу множества $\Delta \cdot F$, то, очевидно, существует функция, не равная нулю в точке ξ и принадлежащая к идеалу J. Поэтому (см. лемму) $\omega(x-\xi;\, h) \in J$ при всех достаточно малых h.

Следовательно,

$$F(\omega(x-\xi;\, h))=0 \quad \text{при } 0<h<\delta(\xi). \tag{15}$$

Но (см. (12))

$$F(\omega(x-\xi;\, h))=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\, nh}{nh}\right)^{r+2} s_n e^{-in\xi}=\left(\frac{u_h-u_{-h}}{2h}\right)^{r+2} s(\xi). \tag{16}$$

Из (16), (15) и (11) следует, что $s(\xi)$ в интервалах, смежных к $\Delta \cdot F$, есть полином степени не выше $r+1$.

Следствие. *Для того чтобы формальное произведение двух тригонометрических рядов* (2) *и* (3) *сходилось всюду к нулю* (*т. е.* $\sigma_n=0$), *необходимо, чтобы* $s(\xi)$ (*см.* (7)) *была многочленом степени не выше* $r+1$ *в каждом интервале, смежном к множеству нулей* F *функции* (2).

Интересным и, повидимому, более трудным является вопрос о том, в какой степени справедлива обратная теорема, т. е. каким условиям должны удовлетворять функции (2), (7) или, быть может, какие условия следует наложить на множество нулей функции (2), чтобы (8) совпадала в интервале $(a,\, b)$ с полиномом степени не выше $r+1$. В общем случае дополнительные условия должны быть, так как из того факта, что при $r \geqslant 1$ в кольце $W_{<\alpha_n>}$ примерный идеал не совпадает с максимальным (см. [3], стр. 46), нетрудно вывести заключение о существовании функции $f(x) \in W_{<\alpha_n>}$ и последовательности s_n, удовлетворяющей условию (5). При этом функция $s(\xi)$, отвечающая последовательности s_n (см. (7)), будет в интервалах, смежных к множеству нулей функции $f(x)$, полиномом степени $r+1$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n s_n \neq 0, \qquad \text{где} \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}=f(x).$$

С другой стороны, легко доказать, что если функция $f(x) \in W_{<\alpha_n>}$ есть предел (в смысле слабой сходимости) функций, равных нулю в окрестности множества F нулей функции $f(x)$, то обратная теорема справедлива.

Наконец, можно привести другие достаточные условия, накладываемые на функцию $f(x)$ и связанные с порядком нулей функции $f(x)$, при которых обратная теорема становится справедливой.

Для случая $r=0$ можно указать ([1]) класс множеств F, для которых обратная теорема верна.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
29 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Диткин, Уч. зап. МГУ, **30**, кн. 3, 115 (1939). [2] И. М. Гельфанд, Математ. сб., **9** (51): 1, 55 (1941). [3] Г. Е. Шилов, Тр. Математ. ин-та им. В. А. Стеклова, **21** (1947). [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939, стр. 131.