Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 9

МАТЕМАТИКА

М. ДЕГТЕРЕВА

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЯДРЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР

(Представлено академиком Н. М. Крыловым 19 IV 1948)

1. В настоящей заметке рассматриваются элементы теории аналитических функций в направлении Коши — Римана в ядре линейных алгебр с модулем — ассоциативных и дистрибутивных, в которых свойство коммутативности не постулируется. Алгебры рассматриваются над полем действительных чисел. Под ядром Θ алгебры порядка n понимается ее коммутативная подалгебра порядка k $(k \leqslant n)$. Если данная алгебра коммутативна $(k=n)$, то она совпадает со своим ядром, что приводит к известному обобщению классической теории на коммутативные системы (1). Если же алгебра некоммутативна $(k<n)$, то, хотя функции, рассматриваемые в ядре, и остаются некоммутативными, однако они подчиняются тем же основным законам, что и функции в коммутативных системах, с некоторыми своеобразными особенностями, налагаемыми некоммутативностью. Это ограничение области изменения независимого переменного ядром алгебры и позволяет обобщить элементы классической теории на линейные алгебры, что в общем случае оказывается невозможным.

2. В рассматриваемых алгебрах можно говорить о существовании в данной точке z ядра Θ двух производных — правой и левой. Обозначив их через $f' \rightarrow (z)$ и $\leftarrow f'(z)$, получим представление производных в форме:

$$f' \rightarrow (z) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j} e_i \right) \frac{1}{e_j}, \qquad \leftarrow f'(z) = \frac{1}{e_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j} e_i, \tag{1}$$

$$j = 1, 2, \ldots, k.$$

Необходимые и достаточные условия существования правой и левой производной в точке z ядра Θ алгебры назовем обобщенными условиями Коши — Римана в ядре Θ и обозначим символами:

$$\begin{aligned} (C \overset{\Theta}{-} R) \rightarrow \qquad & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_p} e_i e_q = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_q} e_i e_p, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad p, q \leqslant k \qquad (2) \\ \leftarrow (C \overset{\Theta}{-} R) \qquad & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_p} e_q e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_q} e_p e_i. \end{aligned}$$

Для коммутативных алгебр эти уравнения совпадают. Соответственно понятию правой и левой производной, вводятся понятия право- и лево-дифференцируемой функции, право- и лево-аналитической функции, последние обозначаются через $f\rightarrow(z)$ и $\leftarrow f(z)$.

Имеют место следующие основные теоремы.

Теорема 1. *Если $f(z)$ — функция право (лево-)-аналитическая в области D ядра Θ, то правый (левый) интеграл от этой функции вдоль любого замкнутого контура C, принадлежащего области D, равен нулю, $\int\limits_C f\rightarrow dz=0$ $\left(\int\limits_C dz\leftarrow f=0\right)$ (производная функции предполагается непрерывной), C — кривая Жордана.*

Теорема 2. *Правый (левый) интеграл $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ $\left(\Phi(z)=\int\limits_{z_0}^{z} d\zeta f(\zeta)\right)$ от функции право (лево-)-аналитической в некоторой области D ядра Θ, рассматриваемый как функция своего верхнего предела, есть функция право (лево-)-аналитическая в той же области D, и правая (левая) производная этой функции $F(z)$ $(\Phi(z))$ равна подинтегральной функции $f(z)$: $F'\rightarrow(z)=f(z)$ $(\leftarrow\Phi'(z)=f(z))$.*

Отсюда возникает понятие правой и левой первообразной функций.

3. Рассмотрим интеграл с двумя подинтегральными функциями следующего вида: $\int\limits_C f(z)\,dz\,\varphi(z)$ ([1]). Назовем этот интеграл ди-интегралом. Введение его представляет особый интерес. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ — аналитические функции (право,-лево-), то возможны следующие четыре варианта ди-интеграла:

$$\text{I. } \int\limits_C f\rightarrow dz\leftarrow\varphi. \quad \text{II. } \int\limits_C \leftarrow f dz\leftarrow\varphi. \quad \text{III. } \int\limits_C f\rightarrow dz\,\varphi\rightarrow. \quad \text{IV. } \int\limits_C \leftarrow f dz\varphi\rightarrow. \qquad (3)$$

Для этих вариантов ди-интеграла можно установить аналоги теоремы Коши, а именно:

Тереома 3. *Если $f(z)$ право-, а $\varphi(z)$ — лево-аналитическая функция в некоторой области D ядра Θ, то ди-интеграл I по любому замкнутому контуру C, принадлежащему области D, равен нулю.*

Теорема 4. *Ди-интеграл II(III) по любому замкнутому контуру C, лежащему в области D ядра Θ, в которой обе функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ одновременно лево (право-)-аналитические, равен нулю, если на некоторые компоненты первой (второй) подинтегральной функции наложены дополнительные условия, состоящие в том, что $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_p}=0$ $\left(\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial z_q}=0\right)$ для некоторых $i>k$, $p\leqslant k$ $(\tau>k,\ q\leqslant k)$.*

Следствие. Ди-интеграл IV по любому замкнутому контуру C, лежащему в области D ядра Θ, в которой $f(z)$ — лево-, а $\varphi(z)$ — право-аналитические функции, равен нулю, если на некоторые компоненты обеих подинтегральных функций наложены дополнительные условия, состоящие в том, что $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_p}=0$, $\dfrac{\partial\varphi_\tau}{\partial z_q}=0$ для некоторых значений $i,\tau>k$; $p,q\leqslant k$ (здесь, как и в теоремах 3 и 4, производные функций предполагаются непрерывными).

В связи с теоремой 4 для ди-интеграла III вводятся понятия тройки, звена и связки индексов алгебр. Индексы ijs постоянных γ_{ijs} $\left(e_ie_j=\sum\limits_{s=1}^{n}\gamma_{ijs}e_s;\ i,j=1,2,\ldots\,n\right)$ назовем тройкой, соединение двух троек вида $iqs - s\tau\nu$ — звеном индексов; некоторую систему звеньев и троек, стоящую в тесной связи с исследованием дополнительных условий для функции $\varphi(z)$, назовем связкой индексов данной алгебры. Арифметический анализ этих связок дает путь не только для получения дополнительных условий для $\varphi(z)$, но и позволяет сразу написать для каждой данной алгебры ее уравнения $(C \overset{\Theta}{—} R)$.

4. Анализ различных вариантов ди-интеграла дает тот основной для всей теории факт, что „аналитическая пара" функций $f \rightarrow (z)$, $\leftarrow \varphi(z)$ (В. Л. Гончаров) обладает замечательным свойством, сближающим ее с аналитической функцией комплексного переменного, а именно: ди-интеграл $\int\limits_{C} f \rightarrow dz \leftarrow \varphi = 0$, если C — замкнутый контур, лежащий в области D ядра Θ, в которой функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ образуют аналитическую пару.

В этом замещении понятия аналитической функции понятием аналитической пары функций некоммутативность впервые используется как некоторое положительное обобщающее начало. С введением ди-интеграла теряется необходимость в расщеплении понятий аналитической функции и интеграла на правые и левые — происходит как бы слияние их в понятиях аналитической пары функций, ди-интеграла, ди-интегрирования.

Таким образом, теория аналитических функций в ядре линейных алгебр в своих первоначальных основных понятиях дает своеобразный аналог теории аналитических функций комплексного переменного.

Воронежский государственный педагогический институт

Поступило 12 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гончаров, Изв. АН СССР, 10, 1406 (1932).