Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 9

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА С. Б. СТЕЧКИНА НА ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

1. С. Б. Стечкин установил [1] следующее неравенство для тригонометрических полиномов $S_n(x)$ порядка n с периодом 2π:

$$|S'_n(x)| \leqslant \frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}} \sup_x |S_n(x+h) - S_n(x)|, \tag{1}$$

где $h < 2\pi/n$ — произвольно фиксированное положительное число. Посредством замены переменной получаем для любого тригонометрического полинома $T_{n,\lambda}(x) = S_n(x/\lambda)$ порядка n с периодом $2\lambda\pi$ неравенство

$$T'_{n,\lambda}(x) \leqslant \frac{p}{2\sin\frac{p\beta}{2}} \sup_x |T_{n,\lambda}(x+\beta) - T_{n,\lambda}(x)|, \tag{2}$$

где $p = n/\lambda$, $0 < \lambda h = \beta < 2\pi/p$.

Таким образом, если в последнем неравенстве считать фиксированным p, то *при всяком целом* $n \geqslant p$ (*т. е.* $n/p = \lambda \geqslant 1$) *неравенство* (2) *справедливо при любом данном значении* $\beta < 2\pi/p$.

Покажем, что неравенство (2) остается в силе, если заменить в нем $T_{n,\lambda}(x)$ любой целой функцией $G_p(x)$ степени p, т. е., *каково бы ни было данное число* $\beta < 2\pi/p$, *справедливо неравенство*

$$|G'_p(x)| \leqslant \frac{p}{2\sin\frac{p\beta}{2}} \sup_x \left| G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3}$$

Неравенство (3) в случае $\beta = \pi/p$ доказано С. М. Никольским [2] непосредственно.)

Действительно, будем искать среди функций $G_p(x)$ степени p, удовлетворяющих условию $|G'_p(x_0)| = M$, где x_0 и $M > 0$ фиксированы, функцию с наименьшим уклонением от нуля $\left|G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right|$, при этом можем произвольно зафиксировать значение $G_p(x)$ в точке x_0: пусть $x_0 = 0$, $G_p(0) = 0$, $G'_p(0) = M$. На основании известной леммы [3], среди этих функций существует функция $G_p(x)$, степени не выше p, которая осуществляет минимум $\sup_x \left|G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right| = L \geqslant 0.$

В случае $\beta < 2\pi / p$ равенство $L=0$ невозможно *, так как функция $G_p(x)$ имеющая период $\beta < 2\pi / p$, была бы постоянной ([3]).

Итак, пусть $G_p(x)$ ($G_p(0)=0$, $G_p'(0)=M$) некоторая функция степени p, обращающая $\sup\limits_x \left| G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right|$ в минимум $L>0$. Ввиду того, что $-G_p(-x)$ обладает тем же свойством, можем принять, что $G_p(x)$ — нечетная функция, а потому

$$G_p^*(x) = G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right) \tag{4}$$

есть ограниченная ($|G_p^*(x)| \leqslant L$) четная функция степени p. В таком случае, как известно, можно построить такие тригонометрические полиномы ([4], [5])

$$T_{n,\lambda}^*(x) = a_{0,\lambda} + \sum_{k=1}^{n} a_{k,\lambda} \cos\frac{kx}{\lambda}, \qquad |T_{n,\lambda}^*(x)| \leqslant L \tag{5}$$

порядков $n = p\lambda \to \infty$, что $\lim\limits_{n=\infty} T_{n,\lambda}^*(x) = G_p^*(x)$ при всяком x $(-\infty < x < \infty)$. Определяя теперь тригонометрические полиномы $T_{n,\lambda}(x)$ из уравнений

$$T_{n,\lambda}\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - T_{n,\lambda}\left(x-\frac{\beta}{2}\right) = T_{n,\lambda}^*(x) \tag{6}$$

при дополнительном условии $T_{n,\lambda}(x)=0$, получим

$$T_{n,\lambda}(x) = \frac{a_{0,\lambda} x}{\beta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k,\lambda}}{2\sin\frac{k\beta}{2\lambda}} \sin\frac{kx}{\lambda},$$

$$T_{n,\lambda}'(x) = \frac{a_{0,\lambda}}{\beta} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k a_{k,\lambda}}{2\lambda \sin\frac{k\beta}{2\lambda}} \cos\frac{kx}{\lambda}.$$

Но вследствие (5), (6) и неравенства (2)

$$|T_{n,\lambda}'(x)| \leqslant \frac{pL}{2\sin\frac{p\beta}{2}} \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{2bis}$$

поэтому последовательность ограниченных функций $T_{n,\lambda}'(x)$ степени p (где $n=\lambda p \to \infty$) может быть выбрана так ([6]), чтобы $T_{n,\lambda}'(x) \to H_p'(x)$ равномерно в любом данном промежутке, причем $H_p(x)$ должна быть целой функцией степени p. Следовательно, имеем также, благодаря (6),

$$H_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - H_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} H_p'(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} T_{n,\lambda}'(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n=\infty}\left[T_n\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - T_n\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right] = \lim_{n=\infty} T_{n,\lambda}^*(x) = G_p^*(x).$$

* Напротив, при всяком $\beta \geqslant 2\pi / p$ функция $G_p(x) = \frac{M\beta}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{\beta}$ степени $2\pi/\beta \leqslant p$ давала бы $L=0$. Таким образом, ограничение $\beta < 2\pi/p$ в неравенстве (3) является необходимым для существования верхней грани $|G_p'(x)|$ при данном $\sup\limits_x \left|G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right|$.

Таким образом, функция $\varphi_p(x) = G_p(x) - H_p(x)$ степени $\leqslant p$, которая, вследствие (4), удовлетворяет уравнению $\varphi\left(x+\frac{\beta}{2}\right)-\varphi\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$, оказывается периодической с периодом $\beta < \pi / p$, т. е. должна быть постоянной. Следовательно, $G_p'(x) \equiv H_p'(x)$, откуда $M = G_p'(0) = H_p'(0) = \lim T_{n,\lambda}'(0)$. Поэтому из ($2^{\text{bis}}$) заключаем, что

$$M \leqslant \frac{pL}{2 \sin \frac{p\beta}{2}}, \tag{3^{bis}}$$

ч. и т. д.

2. Дополним неравенство (3) неравенством

$$\left| G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right| \leqslant 2\sin\frac{p\beta}{2} \sup_x |G_p(x)| \quad (-\infty < x < \infty), \tag{7}$$

дающим точную верхнюю грань $\left| G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right|$ при $\beta \leqslant \pi/p$ (в случае $\beta = \pi / p$ неравенство очевидно)*.

Докажем сначала более общее предложение:

*Среди функций $G_p(x)$ степени p, получающих значения $G_p(x_0) = a$, $G_p(x_1) = b$ в двух данных точках x_0, x_1, где*** $0 < x_1 - x_0 = \beta < \pi / p$, *причем значения a, b таковы, что*

$$(b - a\cos p\beta)(b\cos p\beta - a) > 0 \tag{8}$$

(*единственной*) *функцией, наименее уклоняющейся от нуля* ($-\infty < x < \infty$), *является*

$$S_p(x) = \frac{b\sin p(x - x_0) - a\sin p(x - x_1)}{\sin p\beta},$$

$$\sup |G_p(x)| \geqslant M_0 = \max |S_p(x)| = \frac{1}{\sin p\beta}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos p\beta}. \tag{9}$$

Принимая во внимание, что при сдвиге промежутка (x_0, x_1) M_0 и $\sup|G_p(x)|$ сохраняются, можем считать, что $-\pi / 2 < px_0 < px_1 < \pi / 2$, и так как условие (8) выражает, что $S_p'(x_0) S_p'(x_1) > 0$, зафиксируем точки x_0, x_1 так, чтобы $S_p'(\pi / 2p) = 0$ (т. е. $S_p(0) = 0$). Тогда $S_p(x) = M_0 \sin px$ (полагая для определенности $S_p'(x_1) > 0$).

Докажем теперь невозможность существования такой функции $G_p(x) \gtrless S_p(x)$ степени p, что $\sup|G_p(x)| \leqslant M_0$. Действительно, в таком случае, полагая $\varphi_p(x) = M_0 \sin px - G_p(x)$, мы имели бы ([6]):

$$\varphi_p(x) = \cos px \left\{A - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \left[\frac{1}{px - \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right]\right\}, \tag{10}$$

A и $A_k = (-1)^k \varphi\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{p}\right) \geqslant 0$ — некоторые постоянные.

---

* При $\beta \geqslant \pi / p$ имеем, вообще, $\left|G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right) - G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right| \leqslant 2\sup|G_p(x)|$, и это неравенство не может быть улучшено, так как равенство осуществляется, если $G_p(x) = \sin p_1 x$, где $p_1 = \pi / \beta \leqslant p$.

** Нетрудно видеть, что при $\beta \geqslant \pi / p$, как и в случае нарушения (8), наименьшее значение $\sup|G_p(x)| = \max(|b|, |a|)$, так как, полагая, для определенности, $|b| \geqslant |a|$, видим, что функция $G_p(x) = b\cos p_1(x - x_1)$ степени $p_1 \leqslant p$ удовлетворяет условиям $G_p(x_1) = b$, $G_p(x_0) = a$, если $b\cos p_1\beta = a$.

Но так как каждое слагаемое суммы, вычитаемой из A, убывает с возрастанием x на $(-\pi/2p, \pi/2p)$, то $\varphi_p(x)$ имела бы не более одного корня в этом промежутке, а между тем $\varphi_p(x_0)=\varphi_p(x_1)=0$, следовательно, необходимо, чтобы все $A_k=A=0$.

Рассмотрим теперь совокупность всех функций $G_p(x)$, удовлетворяющих только одному условию $|G_p(x_1)-G_p(x_0)|=|b-a|=L$. Если $N=\min\sup|G_p(x)|$ соответствует значениям (a, b), удовлетворяющим (8), то, вследствие (9),

$$N=\min\frac{\sqrt{L^2+4b(b-L)\sin^2\frac{p\beta}{2}}}{\sin p\beta}=\frac{L\cos\frac{p\beta}{2}}{\sin p\beta}=\frac{L}{2\sin\frac{p\beta}{2}}$$

и осуществляется функцией $S_n(x)=\dfrac{L\sin px}{2\sin\frac{p\beta}{2}}$ при $b=-a=L/2$. Но значение $\leqslant N$ не может получиться без (8), так как тогда мы имели бы* $\sup|G_p(x)|\geqslant\max(|b|, |a|)\geqslant\dfrac{L}{2\sin^2\frac{p\beta}{2}}$. Таким образом, (7) доказано. Из (7) следует, что модуль непрерывности $(p\beta\leqslant\pi)$

$$\omega(\beta, G_p(x))=\sup_{x,\ |\delta|\leqslant\beta}\left|G_p\left(x+\frac{\beta}{2}\right)-G_p\left(x-\frac{\beta}{2}\right)\right|\leqslant 2\sin\frac{p\beta}{2}\sup|G_p(x)|.$$

Поступило
30 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Б. Стечкин, ДАН, **60**, № 9 (1948). [2] С. М. Никольский, ДАН, **60**, № 9 (1948). [3] С. Н. Бернштейн, ДАН, **51**, № 5 (1946). [4] Б. М. Левитан ДАН, **15**, № 4 (1937). [5] С. Н. Бернштейн, ДАН, **54**, № 2 (1946). [6] С. Н. Бернштейн, ДАН, **52**, № 7 (1946).

* См. предыдущую сноску.