Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 9

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ОСНОВЫ ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Наша цель состоит в построении такой теории двухмерных метрических многообразий, которая, будучи возможно более общей, включала бы внутреннюю геометрию регулярных поверхностей и многогранников и сохраняла бы главнейшие относящиеся к ним понятия. В частности, должны существовать геодезические линии, угол между любой парой геодезических, исходящих из одной точки, площадь и интегральная кривизна любого компактного множества.

В настоящей заметке я формулирую исходные определения и некоторые основные теоремы, на которых теория в большей мере будет основана. Дальнейшее развитие теории будет освещено в последующих сообщениях.

2. Пусть R — метрическое многообразие с метрикой ρ (т. е. метрическое пространство, являющееся многообразием). Длина кривой $X(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в R может быть определена обычным путем как $\sup \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(X(t_{i-1})X(t_i))$ $(0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1)$. Метрика ρ называется в н у т р е н н е й, если для любых $X, Y \in R$ расстояние $\rho(XY)$ равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки X, Y. Внутренняя метрика всякой поверхности, определенная обычным путем, является внутренней в смысле данного определения. Поэтому мы вводим как аксиому:

I. *R есть двухмерное многообразие с внутренней метрикой.*

Во всем дальнейшем это условие предполагается выполненным.

К р а т ч а й ш е й мы называем кривую, имеющую наименьшую длину среди всех кривых с теми же концами. (Геодезическая определяется как кривая, кратчайшая на каждом достаточно малом отрезке.)

Отметим некоторые простые факты. 1) Для каждой точки $A \in R$ и ее окрестности U существует такая окрестность V той же точки A, что каждые две точки из V соединимы кратчайшей, лежащей в U. 2) Кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку, и поэтому вблизи ее внутренних точек можно различать две ее стороны. 3) Длина кратчайшей равна расстоянию между ее концами. 4) Пусть G — область в R. Если для каждой пары X, $Y \in R$ положить $\rho_G(XY)$ равным точной нижней границе длин кривых, лежащих в G и соединяющих X и Y, то G превратится в многообразие с внутренней метрикой ρ_G. Мы говорим, что эта метрика индуцируется в G метрикой в R. Каждая точка $A \in G$ имеет окрестность, где $\rho_G=\rho$, и ρ_G есть единственная внутренняя метрика в G, обладающая этим свойством.

Под треугольником ABC мы будем понимать замкнутое множество, ограниченное в области, гомеоморфной кругу, тремя кратчайшими, соединяющими попарно три данные точки A, B, C. Эти точки суть вершины, а кратчайшие — стороны треугольника.

Мы говорим, что два треугольника не перекрываются, если их общая часть не содержит никакого треугольника, не вырождающегося в кратчайшую, и никакая сторона одного не пересекает стороны другого. Две кратчайшие мы считаем пересекающимися только в том случае, если они имеют общие внутренние точки и одна из них имеет точки по обе стороны от другой.

Заметим, что треугольник может и не иметь внутренних точек даже тогда, когда его вершины не лежат на одной кратчайшей. Например, возьмем конус с полным углом при вершине O, равным 4π, и разделим этот угол образующими на три равные части. Тогда три отрезка AO, BO, CO этих образующих, взятые попарно, образуют три кратчайшие AB, BC, CA, которые в свою очередь образуют треугольник ABC без внутренних точек.

3. Пусть L, M — две кривые в R, исходящие из одной точки O. Пусть X, Y — переменные точки, соответственно, на L и M. Построим плоский треугольник со сторонами, равными $\rho(OX)$, $\rho(OY)$, $\rho(XY)$, и пусть $\gamma(XY)$ его угол, противолежащий стороне $\rho(XY)$. Верхним углом между кривыми L и M (в точке O) мы называем $\overline{\lim\limits_{X,Y\to O}}\ \gamma(X, Y)$ (верхний предел угла $\gamma(XY)$). Под углом между L и M мы понимаем $\lim\limits_{X,Y\to O}\gamma(XY)$, который может и не существовать, в то время как верхний угол всегда существует.

Верхним углом $\overline{\alpha}$ треугольника $T = ABC$ при вершине A естественно считается верхний угол между его сторонами AB, AC в точке A. Избытком треугольника T мы называем величину $\overline{\omega}(T) = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} - \pi$, где $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ — верхние углы T.

Теперь мы формулируем еще одну аксиому:

II. *Для всякого компактного множества* $G \subset R$ *существует такое число* $\nu(G)$, *что для всякой конечной совокупности попарно неперекрывающихся треугольников* $T_i \subset G$ $\sum\limits_i |\overline{\omega}(T_i)| \leqslant \nu(G)$.

Мы будем говорить, что R (или его метрика) имеет „ограниченную кривизну". Предметом нашей теории будут двухмерные многообразия с внутренней метрикой ограниченной кривизны. Если хотеть сохранить понятие об интегральной кривизне, то аксиома II (или какая-либо ей аналогичная) представляется неизбежно.

4. Метрику ρ в многообразии R мы называем многогранной, если она внутренняя и если каждая точка в R имеет окрестность, изометричную конусу. Легко видеть, что это условие эквивалентно следующему: всякое компактное множество G может быть покрыто конечным числом треугольников, изометричных плоским треугольникам и не имеющим общих внутренних точек. Следовательно, многогранная метрика может быть задана триангуляцией многообразия составленной из плоских треугольников.

Пусть R имеет многогранную метрику. Пусть $A \in R$ и пусть θ есть полный угол вокруг вершины конуса, изометричного окрестности A, причем при изометрии точка A соответствует вершине конуса. Мы говорим, что θ есть полный угол вокруг точки A. Величина $\omega(A) = 2\pi - \theta$ есть „кривизна точки A". Абсолютная кривизна (просто кривизна) множества $G \subset R$ определяется как сумма модулей кривизн (самих кривизн) всех точек из G. Для компактного G абсолютная кривизна конечна.

Мы говорим, что метрика ρ в R риманова, если R есть риманово многообразие в обычном смысле. Под абсолютной кривизной множества G в таком многообразии мы, естественно, понимаем интеграл модуля гауссовой кривизны по площади множества G.

Очевидно, что многообразия с многогранной или римановой метрикой удовлетворяют аксиоме II ограниченности кривизны.

5. Теперь мы формулируем нашу основную теорему:

Теорема 1. *Двухмерное многообразие R с внутренней метрикой ρ имеет ограниченную кривизну тогда и только тогда, когда во всякой компактной области* $G \subset R$ индуцированная в ней метрика ρ_G допускает равномерное приближение многогранными, или, что эквивалентно, римановыми метриками, в которых абсолютные кривизны области G ограничены в совокупности.*

(Между прочим, мы доказываем, что в многообразии с внутренней метрикой ограниченной кривизны всякая точка имеет сколь угодно малую выпуклую окрестность, т. е. такую, что каждые две ее точки соединены в ней кратчайшей. Очевидно, метрика ρ_G, индуцированная в выпуклой области G, совпадает в G с самой метрикой ρ.)

Значение теоремы 1 состоит, очевидно, в том, что она обеспечивает возможность исследовать наши общие многообразия путем приближения многогранными или римановыми многообразиями.

6. Для всякого двухмерного многообразия R с внутренней метрикой ρ ограниченной кривизны имеют место теоремы:

Теорема 2. *Между каждой парой кратчайших в R исходящих из одной точки, существует угол в смысле данного выше определения.*

(Очевидно, что в случае многогранной или римановой метрики это будет угол в смысле обычного определения.)

Пусть G — открытое множество в R. Назовем положительной (отрицательной) частью кривизны множества G (в обозначениях $\omega^+(G)$ и $\omega^-(G)$) точную верхнюю границу (нижнюю границу с обратным знаком) сумм избытков попарно неперекрывающихся треугольников, заключенных в G.

Для любого $M \subset R$ определяем

$$\omega^+(M) = \inf_{G \supset M} \omega^+(G), \qquad \omega^-(M) = \inf_{G \supset M} \omega^-(G).$$

Теорема 3. *Функции множества ω^+, ω^-:* 1) *имеют конечные значения для компактных множеств,* 2) *неотрицательны,* 3) *вполне аддитивны в кольце борелевских множеств.*

(В случае многогранной метрики $\omega^+(M)$ (соотв. $\omega^-(M)$) есть сумма положительных (соотв. отрицательных) кривизн вершин, заключенных в M. В случае римановой метрики $\omega^+(M)$ (соотв. $\omega^-(M)$) есть интеграл гауссовой кривизны по той части M, где гауссова кривизна положительна (соотв. отрицательна.)

Кривизной множества M мы назовем разность $\omega^+(M) - \omega^-(M)$, а абсолютной кривизной — сумму $\omega^+(M) + \omega^-(M)$. Отметим, между прочим, что кривизна треугольника может и не равняться его избытку, что может иметь место уже в простейшем случае многогранной метрики.

В связи с понятием кривизны отметим теорему:

Теорема 4. *Если избыток каждого треугольника в R равен нулю, то метрика в R локально-евклидова, т. е. каждая точка в R имеет окрестность, изометричную плоской области.*

---

* Т. е. в области с компактным замыканием.

Доказательства теорем 1 и 3 существенно основаны на следующей лемме:

Всякое компактное $M \subset R$ при всяком $\varepsilon > 0$ допускает покрытие конечным числом попарно неперекрывающихся треугольников диаметров $< \varepsilon$.

Пусть P — многоугольник в R, т. е. компактное множество с внутренними точками, ограниченное конечным числом кратчайших. Пусть Z — разбиение P на треугольники, d_Z — наибольший диаметр треугол ника в разбиении Z, $\sigma_0(Z)$ — сумма площадей плоских треугольников, имеющих стороны той же длины, что треугольники разбиения Z.

Площадью многоугольника P мы называем предел этих сумм, при условии, что $d_Z \to 0$.

Теорема 5. *Всякий многоугольник P в R имеет конечную положительную площадь $\sigma(P)$ в смысле данного определения. При этом меет место оценка: для всякого разбиения Z*

$$-\frac{1}{2}\omega^-(P)\,d_Z^2 \leqslant \sigma(P) - \sigma_0(Z) \leqslant \frac{1}{2}\omega^+(P)\,d_Z^2.$$

Площадь любого множества в R определяется из площадей многоугольников обычными приемами теории меры и оказывается вполне аддитивной на кольце борелевских множеств. Очевидно, что в случае многогранной или римановой метрики так определенная площадь совпадает с обычной.

Теоремы 2—5 показывают, что многообразия с внутренней метрикой ограниченной кривизны действительно удовлетворяют тем общим условиям, какие были намечены в начале заметки.

7. Намечаемая здесь теория представляет собой естественное обобщение развитой мной внутренней геометрии произвольных выпуклых поверхностей ([1]). Эта последняя получается, если к аксиомам I, II присоединить аксиому

III. *Для каждого треугольника $T \subset R$ его избыток $\bar{\omega}(T) \geqslant 0$.*

При этом условии всякая точка из R имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности евклидова пространства.

Если аксиому III заменить более общей:

IIIа. *Для каждого треугольника $T \subset R$ отношение его избытка и площади плоского треугольника со сторонами той же длины ограничено снизу одной и той же постоянной K,*

то каждая точка в R имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности в пространстве постоянной кривизны K.

Однако следует иметь в виду, что заключающийся в намечаемой здесь теории переход к поверхностям знакопеременной кривизны, не ограниченной аксиомой IIIа, приводит к целому ряду качественно новых фактов и особенностей.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
26 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, 1948.