Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LX, № 8

ГИДРОМЕХАНИКА

П. П. КУФАРЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНТУРЕ НЕФТЕНОСНОСТИ ДЛЯ КРУГА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 IV 1948)

Задача о стягивании контура нефтеносности [1] для простейшего случая одной скважины сводится, как известно, к определению функции:

$$z = z(w, t), \quad z(0, t) = z_0, \quad z'_w(0, t) > 0, \tag{1}$$

отображающей круг $|w| < 1$ на область $G(t)$, занятую нефтью в данный момент, по граничному условию:

$$\frac{1}{\omega} z'_t(\omega, t)\,\overline{z}'_t\left(\frac{1}{\omega}, t\right) + \omega \overline{z}'_t\left(\frac{1}{\omega}, t\right) z'_w(\omega, t) = -2, \quad \omega = e^{i\vartheta} \tag{2}$$

и начальному условию:

$$z(w, 0) = \varphi(w), \tag{3}$$

где $\varphi(w)$ — известная функция, отображающая $|w| < 1$ на заданную область $G(0)$, занятую нефтью в начальный момент.

Здесь предлагается решение этой задачи для случая, когда область $G(0)$ есть круг $|z| < 1$ и скважина помещается в точке $z_0 = h$, $0 < h < 1$*.

§ 1. Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Пусть на некотором интервале $|t| < t_0$ функции $\beta(t)$, $\alpha(t)$, $A_k(t)$, $a_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ являются решением системы уравнений:

$$\beta\overline{\beta} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{A}_k \beta}{\overline{a}_k^2} = D_1 - 2t, \qquad \alpha - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a_k} = D_2,$$

$$\alpha + \frac{\beta}{\overline{a}_k} - \sum_{s=1}^{n} \frac{A_s \overline{a}_k}{a_s \overline{a}_k - 1} = C_k, \quad \frac{\overline{A}_k \beta}{\overline{a}_k^2} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\overline{A}_k A_s}{(\overline{a}_k a_s - 1)^2} = C'_k, \tag{4}$$

где D_1, D_2, C_k, C'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, и пусть $|a_k(t)| > 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда функция

$$z = \beta w + \alpha + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{w - a_k(t)} \tag{5}$$

удовлетворяет граничному условию (2).

В частности $(n = 1)$, функция

$$z = \beta w + \alpha + \frac{A}{w - a} \tag{6}$$

* Приближенное решение этой задачи дано П. Я. Полубариновой-Кочиной [2].

удовлетворяет граничному условию (2), если β, α, A, a решение системы

$$\beta\bar{\beta} = \frac{\bar{A}\beta}{\bar{a}^2} = D_1 - 2t, \qquad \alpha - \frac{A}{a} = D_2,$$

$$\alpha + \frac{\beta}{\bar{a}} - \frac{A\bar{a}}{a\bar{a} - 1} = C, \qquad \frac{\bar{A}\beta}{\bar{a}^2} - \frac{A\bar{A}}{(a\bar{a} - 1)^2} = C'. \tag{7}$$

§ 2. Воспользуемся функцией (6), чтобы получить решение задачи для круга $|z| < 1$ со скважиной в точке $z_0 = h$. В этом случае

$$z(w, 0) = \beta_0 w + \alpha_0 + \frac{A_0}{w - a_0} \tag{8}$$

совпадает с

$$\varphi(w) = \frac{h + w}{1 + hw} = \frac{1}{h} + \frac{1 - 1/h^2}{w + 1/h}, \tag{9}$$

если принять

$$\beta_0 = \beta(0) = 0, \quad \alpha_0 = 1/h, \quad A_0 = 1 - 1/h^2, \quad a_0 = -1/h. \tag{10}$$

Положим в (7)

$$D_1 = 0, \quad D_2 = h, \quad C = 0, \quad C' = -1. \tag{11}$$

Тогда система (7) будет иметь решение, удовлетворяющее начальным условиям (10). Это решение определяется формулами:

$$a = a(t), \quad A = \frac{1 + 2t - h^2 a^2}{2ha}(a^2 - 1),$$

$$\beta = \frac{1 + 2t - h^2 a^2}{2ha}, \quad \alpha = \frac{(a^2 - 1)(1 + 2t) + (a^2 + 1)h^2 a^2}{2ha^2}, \tag{12}$$

где $a = a(t)$ — тот из корней уравнения:

$$2h^4 a^6 + h^2(4t - 2 - h^2)a^4 + (1 + 2t)^2 = 0, \tag{13}$$

который стремится к $a_0 = -1/h$ при $t \to 0$. Таким образом,

$$z(w, t) = \beta w + \alpha + \frac{A}{w - a} = \frac{aw - 1}{w - a}\left(\frac{1 + 2t - h^2 a^2}{2ha^2} w + ha\right). \tag{14}$$

§ 3. Пусть t_1 — вещественный корень уравнения

$$27h^2(1 + 2t)^2 + (4t - 2 - h^2)^3 = 0 \tag{15}$$

($t_1 > 0$). Функция $a(t)$ вещественна на интервале $[0, t_1]$ и возрастает от $-1/h$ до

$$a_1 = a(t_1) = -\sqrt[3]{(1 + 2t_1)/h^2}. \tag{16}$$

Формула (14) дает однолистное решение задачи при $0 < t < t_1$.

В заключение заметим, что формула (5) и ее обобщения принципиально дают возможность решения задачи для случая рациональной функции $\varphi(w)$.

Физико-технический институт
Томского государственного университета
им. В. В. Куйбышева

Поступило
12 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Я. Полубаринова-Кочина и С. В. Фалькович, Прикладн. матем. и механ., 11, в. 6, 664 (1947) [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Прикладн. математ. и мех., 9, в. 1, 79 (1945).